Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
2. pótZH

2017 ősz, 2017.12.12 13:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és, ha ez nem egyértelmű, a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   a.) (0 pont) Horváth Illés, páratlan heteken (péntek, IB145)

   b.) (0 pont) Kói Tamás, páratlan heteken (péntek, QBF10)

   c.) (0 pont) Patkó Richárd, páratlan heteken (péntek, IB147)

   d.) (0 pont) Patkó Richárd, páros heteken (péntek, IB147)

1. Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1+X_2+\cdots+X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

   a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

   b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \le X_k \le 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

   c.) X_k egyenletes a $[0,1]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   d.) X_k egyenletes a $[0,k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   e.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k+1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

2. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra legfeljebb 5 órát kell várni.

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x\ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.)$$

3. Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

   a.) (2 pont) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

   b.) (2 pont) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

c.) (3 pont) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

d.) (2 pont) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

4. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

a.) (2 pont) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemesésznél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

b.) (2 pont) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

c.) (2 pont) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

d.) (2 pont) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

e.) (1 pont) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

5. Mintát vettünk egy X normális eloszlású valószínűségi változóból, melynek várható értéke *ismert*: $m = 1000$, de szórása ismeretlen. Azt kaptuk, hogy 997, 1002, 998, 1003, 996, 1001, 998, 1004, 1005. Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására.