Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH pótlása

2018 ősz, 2018.12.06 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: Prokaj Rudolf, kedd 14-16 (E402) ; Prokaj Rudolf, csütörtök 14-16 (E402) ; Rokob Sándor, csütörtök 10-12 (R507); Rokob Sándor, péntek 10-12 (R515)

1. Legyen $n = 300$, legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, $[-1, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ha a $\mathbb{P}(S_n > 30)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétel segítségével becsüljük,

   a.) Mennyit kapunk?

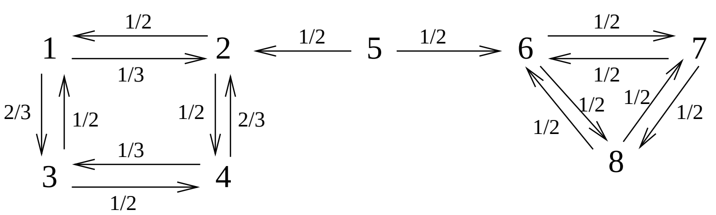
   b.) Legfeljebb mennyit tévedhetünk a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételbeli konstantst vehetjük $C = 0.4748$-nak.)

2. Egy vizsgán 120 hallgató jelenik meg, közülük 90 készült, 30 pedig nem. Aki készült, 90% valószínűséggel megy át, aki viszont nem, az csak 30%-kal. Adjuk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a hallgatók legalább fele megbukik.

   (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \qquad \textit{(ha } 0 < x < 1\textit{).)}$$

3. Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



   Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

   a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$

   b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$

   c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) \approx ?$

   d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx ?$

4. A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

   Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

   a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk résznél a rátákkal!*

   b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

   c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

5. Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

   Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legalább 7000 méter magas.