Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH 2. pótlása

2018 ősz, 2018.12.13 10:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: Prokaj Rudolf, kedd 14-16 (E402) ; Prokaj Rudolf, csütörtök 14-16 (E402) ; Rokob Sándor, csütörtök 10-12 (R507); Rokob Sándor, péntek 10-12 (R515)

1. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

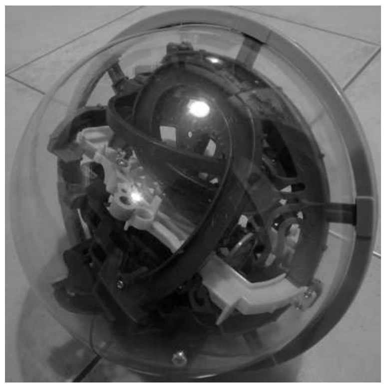
   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).}$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

2. Bergengócia elektromos hálózatára tízezer fogyasztó kapcsolódik. Közülük 9000-nek 32 amperes biztosítéka van, vagyis az általa felvett teljesítmény legfeljebb $32A \times 230V = 7360W$ lehet. A maradék 1000 fogyasztónak 100 amperes biztosítéka van, így legfeljebb $100A \times 230V = 23000W$ teljesítményt vehet fel. Bergengóciában a „csúcsidő" délután 2-kor van, ekkor mérik a legnagyobb fogyasztást. A bergengóc elektromos műveknek az egyes fogyasztók csúcsidőbeli fogyasztásának eloszlásáról (a fenti korlátokon túl) fogalma sincs, de azt tudják, hogy az egyes fogyasztók fogyasztásai függetlenek, és hogy az *átlagos összfogyasztás* csúcsidőben $3.2 \cdot 10^7 W$. Mekkora kell legyen az elektromos hálózat K összteljesítménye (Watt-ban), ha azt akarják, hogy a csúcsidő-beli össz-fogyasztás $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel K alatt maradjon?

3. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik", és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről.
   Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.
   b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?
   c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbböször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

4. Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

   a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát. Indokoljuk.

   b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

   c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja? Miért?

   d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve? Miért?

5. Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig $5M\Omega$. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	1209	1198	1200	1196	1213	1209	1202	1205	1208	1200
B ellenállás	1198	1202	1191	1198	1192	1201	1193	1193		

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

(Segítség: az „A” adatsor átlaga 1204, *a „B” adatsor átlaga pedig* 1196.*)*