Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

4. feladatsor
Függetlenség

4.1 Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?

• 4.2 Kilencszer dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között legalább két fej és legalább két írás is elfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb négy írás fordul el. Függetlenek-e a fenti események egymástól? Miért?

• 4.3 Vegyünk egy n fős társaságot. Jelölje A_{ij} azt az eseményt, hogy az i-edik és j-edik ember egy napon született.

(a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

(b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

4.4 Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy $A \subset B$?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy $A \cap B = \emptyset$?

4.5 Válasszunk találomra egy számot az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból, egyenletes eloszlással. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p prím számmal osztható.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prímek és az n szám osztható $p_1, p_2, \ldots,$ p_k-val, akkor az $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ események (teljesen) függetlenek.

(b) Jelöljük C_n-el azt az eseményt, hogy a véletlenszerűen kiválasztott szám n-hez relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}(C_n) = \prod_{p \text{ prím}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

4.6 Legyen $s \in (1, \infty)$ rögzített és $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ a Riemann féle dzeta-függvény. (A végtelen összeg $s > 1$-re konvergens!) Továbbá legyen $p_n = p_n(s) := n^{-s}/\zeta(s)$. Legyen egy $X \in \mathbb{N}$ véletlen szám *eloszlása* $\mathbf{P}(X = n) = p_n$. Értelmezzük bármely r prím számra a következő eseményt:

$$E_r := \{ \text{ az } X \text{ véletlen természetes szám osztható az } r \text{ prím számmal } \}$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy az $\{E_r : r \text{ prím } \}$ események teljesen függetlenek.

(b) Adjunk valószínűségszámítási bizonyítást (és ezzel valószínűségszámítási 'ertelmezést is) a híres

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{r:\ r \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{r^s}\right)$$

*Euler furmulá*ra.
(Az Euler formula standard levezetése és értelmezése megtalálható bármely elemi bevezető számelmélet jegyzetben vagy könyvben.)

4.7 (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy két egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény küzül legalább az egyik legalább két találatos?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan öt darab öttalálatos szelvény lesz?

• 4.8 (a) Hány (egymástól független) bridzsleosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász északnak jusson, legalább 0,5 legyen?

(b) Hány (egymástól független) bridzsleosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász egy kézbe jusson, legalább 0,5 legyen?

4.9 Egy tesztrendszerű vizsgánál minden diáknak 20 kérdésre kell igennel vagy nemmel felelni. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó az egyes kérdésekre egymástól függetlenül p valószínűséggel tudja a helyes választ, q valószínűséggel azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, r valószínűséggel nem tudja a helyes választ és ennek tudatában van $(p + q + r = 1)$. Ha a vizsgázó tudja, hogy egy kérdésre nem tudja a helyes választ, akkor találomra ír igent vagy nemet $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgázó legalább 19 kérdésre helyesen válaszol?

• 4.10 Számítsuk ki a $\mathbf{P}(A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n)$ valószínűséget, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek és mindegyiknek a valószínűsége p.

4.11 Egy országban az A, B, C és D városok között a következő közvetlen utak vannak: $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$. Egy téli éjszaka mind az öt útszakaszon p valószínűséggel képződik hóakadály, kölcsönösen függetlenül egymástól. Mi a valószínűsége annak, hogy másnap reggel mégis el lehet jutni A-ból D-be? Adjunk számszerü eredményt $p = 1/2$-re. Próbáljuk megindokolni az utóbbi választ az első kérdésre kapott formula használata nélkül is.

• 4.12 (Stefan Banach gyufásdoboz-problémája)

- Egy szórakozott matematikus vesz két doboz gyufát. Mindkét doboz n szál gyufát tartalmaz. Egyik dobozt a bal-, másikat a jobb zsebébe teszi. Valahányszor pipára akar gyújtani, véletlenszerűen kiveszi az egyik dobozt és abból elhasznál egy szál gyufát. Egyik alkalommal azt veszi észre, hogy az elővett gyufásdoboza már üres. Mi annak a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan k elhasználatlan gyufaszál van még?
- A fenti kérdésre adott válasz segítségével találjunk egyszerű kifejezést az alábbi összegre:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}.$$

4.13 Egy n egymástól függetlenül működő alkatrészből álló rendszert figyelünk meg egymás utáni, azonos hosszúságú időperiódusokban. Feltesszük, hogy minden egyes alkatrész működése vagy nem működése egy periódusban független attól, hogy működött-e vagy sem a többi periódusban. A rendszer működésében akkor van fennakadás, ha legalább k alkatrész nem működik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez először az m-edik periódusban következik be, ha p annak a valószínűsége (minden alkatrészre), hogy egy alkatrész egy periódusban működjék?

4.A Legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ események függetlenek és mindegyiknek a valószínűsége p. Mennyi a valószínűsége, hogy „amennyi közülük bekövetkezik”, az 3-mal osztható?