Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

6. feladatsor
Diszkrét valószínűségi változók II: várható érték, szórásnégyzet, függetlenség stb.

6.1 Legyenek X_1 és X_2 független, $p(k;\lambda_1)$ ill. $p(k;\lambda_2)$ Poisson eloszlású valószínűségi változók.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ eloszlása $p(k;\lambda_1+\lambda_2)$ Poisson eloszlás.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ *ismeretében* X_1 *feltételes eloszlása binomiális*, azaz:

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

6.2 Legyenek X, Y és Z független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók.

(a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(X = Y), \quad \mathbf{P}(X \geq 2Y), \quad \mathbf{P}(X + Y \leq Z).$$

(b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

6.3 Legyenek X és Y független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be *számolás nélkül*, hogy $X + Y$ *ismeretében* X *feltételes eloszlása* egyenletes, azaz:

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

6.4 (a) Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi az összes fej-dobások számának várható értéke?

(b) Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás eredménye azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

• 6.5 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal, mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

(a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

(b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

6.6 Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának, illetve minimumának várható értéke?

6.7 Határozzuk meg az ötös lottó találatok számának, várható értékét egy találomra kitöltött szelvény esetén.

• 6.8 Számítsuk ki az ötös lottó sorsoláson kihúzott legnagyobb, illetve legkisebb szám várható értékét.

• 6.9 Adjon példát olyan X diszkrét eloszlású valószínűségi változóra, amelynek

(a) nem létezik a várható értéke,

(b) létezik a várható értéke, de nem létezik szórása,

(c) létezik az $\mathbf{E}(X^k)$ ún. k-adik momentuma, ha $k = 1, 2, \dots, p$, de nem létezik, ha $k = p+1, p+2, \dots$.

Útmutatás: Mely s-ekre konvergens a $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ sor (ami a Riemann-féle ζ függvényt definiálja)? A kapott eloszlások momentumai is kifejezhetőek a ζ-függvény segítségével.

6.10 Legyen X nem-negatív egész értékű valószínűségi változó és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i).$$

• 6.11 Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

6.12 Számítsuk ki az $(1+X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

(a) ha X $b(k;p,n)$ binomiális eloszlású;

(b) ha X $p(k;\lambda)$ Poisson eloszlású.

• 6.13 X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, mely egy ketyere működési idejét fejezi ki napokban mérve. Mennyi a ketyere várható élettartama, ha

(a) $\mathbf{P}(X \geq n) = 1/n!$

(b) $\mathbf{P}(X \geq n) = 1/n$?

6.14 (a) Legyenek X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}(X) < \infty$ és $\mathbf{E}(Y) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\min\{X,Y\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)\mathbf{P}(Y \geq i).$$

(b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív egész értékű X_1, X_2, $\ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről felteszszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X_j \geq i).$$

(c) Az (a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\max\{X,Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \mathbf{P}(X \leq i)\mathbf{P}(Y \leq i)\right].$$

6.15 Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma ($\mathbf{E}(X^2) < \infty$). Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \geq k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{D}^2(X)$ segítségével.

6.16 Legyen X pozitív értékű valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy $(\mathbf{E}(X))^{-1} \leq \mathbf{E}(X^{-1})$. (Megjegyzés: ez a Jensen egyenlőtlenség legegyszerűbb speciális esete.)