Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

9. feladatsor
Együttes eloszlások, valószínűségi változók függvényei II.

Memo: Két (vagy több) valószínűségi változó együttes eloszlása, jellemzői.
Az (X, Y) valószínűségi változó pár *együttes eloszlásfüggvénye*: $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$F(x, y) := \mathbf{P}(X < x, Y < y).$$

Az együttes eloszlásfüggvény primér tulajdonságai:

(a) erős monotonság: tetszőleges $a \le b$ és $c \le d$-re

$$F(b, d) - F(b, c) - F(d, a) + F(a, c) \ge 0;$$

(b) $F(x, y)$ mindkét változójában balról folytonos.

(c) $\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$ és $\lim_{x,y\to\infty} F(x, y) = 1$.

Ha $F(x, y)$ előáll $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s, t)dsdt$ alakban, akkor az $F(x, y)$ együttes eloszlásfüggvény *abszolút folytonos* és *sűrűségfüggvénye* $f(s, t)$.
A sűrűségfüggvény primér *tulajdonságai*:

(a) mérhető;

(b) nemnegatív;

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)dsdt = 1$.

Marginális (vagy perem-) eloszlások:

$$F_1(x) := \mathbf{P}(X < x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y), \qquad F_2(y) := \mathbf{P}(Y < y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y).$$

9.1 Általánosítsuk a fentieket (különös tekintettel a monotonságra és a limeszekre) $n > 2$ valószínűségi változó együttes eloszlására.

9.2 Mutassunk példát olyan kétváltozós $F(x, y)$ függvényre, amely rendelkezik az eloszlásfüggvények (b) és (c) tulajdonságával, mindkét változójában külön-külön monoton nem-csökkenő, de nem (erősen) monoton a fenti (a) értelemben. Miért nem lehet egy ilyen függvény együttes eloszlásfüggvény?

9.3 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

• 9.4 Legyenek $F(x)$ és $G(y)$ egydimenziós valószínűségi eloszlásfüggvények és $\alpha \in [-1, 1]$ rögzített. Bizonyítsuk be, hogy

$$H(x, y) = F(x)G(y)\big(1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))\big)$$

együttes eloszlásfüggvény, amelynek marginálisai $F(x)$, illetve $G(y)$.

9.5 Legyen (X, Y) az $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordinátapárja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

• 9.6 Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat.

9.7 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.

9.8 Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X, ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}(Z=1) = p = 1 - \mathbf{P}(Z=0)$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1-Z)Y, \quad U := ZX + (1-Z)\max\{X,Y\}, \quad V := ZX + (1-Z)\min\{X,Y\}.$$

9.9 Legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Határozza meg az XY szorzatként előálló új változó sűrűségfüggvényét.

9.10 Legyenek X, Y és Z függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Legyen $U = X + Y$ és $V = Y + Z$. Számítsa ki U és V együttes sűrűségfüggvényének értékét az $(u = 0.9, v = 1.2)$ pontban.

• 9.11 Legyenek X és Y független, abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvényeiket jelölje f és g. Legyen $Z := X/Y$, és jelölje Z sűrűségfüggvényét h.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(zy)|y|g(y)dy.$$

(b) Milyen eloszlású lesz Z, ha X és Y standard normális eloszlásúak?

9.12 Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon, Y pedig egyenletes eloszlású a $[0,X]$ intervallumon. Számítsuk ki az $\mathbf{E}(Y|X=x)$ és $\mathbf{E}(X|Y=y)$ feltételes várható értékeket.

• 9.13 Jelölje D az origó középpontú egységkörlap és a $(2,1)$ középponttú $\frac{1}{2}$ sugarú körlap unióját. Legyen (X,Y) a D-ben egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pont koordinátapárja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét, továbbá X és Y várható értékét.

• 9.14 Dobok egy dobókockával. Ha az eredmény i, akkor folytonos egyenletes eloszlás szerint választok egy számot a $(0,i)$ intervallumon.

(a) Mi lesz a kapott szám eloszlásfüggv?nye, első és második momentuma?

(b) Ha a kísérletet tízszer megismétlem, mi lesz a kapott számok maximumának eloszlásfüggvénye?

9.15 Legyenek X, Y és Z független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

(a) Határozzuk meg az $S := Y - X$ és $T := Z - Y$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét.

(b) Határozzuk meg az $U := [X]$ és $V := X - [X]$ valószínűségi változók együttes eloszlását.

9.16 Legyenek X és Y független, $CAU(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $Z := (X+Y)/(1-XY)$ is $CAU(0,1)$ eloszlású.
Útmutatás: Használjuk a $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)/(1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta)$ azonosságot.

9.17 (a) A $[0,1]$ intervallumban egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

(b) Egységnyi oldalhosszú négyzet belsejében egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

9.18 Meghatározandó az $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ véletlen vektorok által definiált parallelogramma területének várható értéke a következő három esetben:

(a) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a sík egységkörének kerületén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

(b) $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ egymástól független standard Gauss eloszlású kétdimenziós vektorváltozó. (Azaz az X_1, X_2, Y_1 és Y_2 függetlenek és $N(0,1)$ eloszlásúak.)

(c) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a tér egységgömbjének felszínén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

9.19 Legyen $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $N(0,1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő véltozókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \quad i = 1,2,3.$$

(a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\vec{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.