Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2007/2008. őszi félév, Szász Domokos

12. feladatsor
DeMoivre-Laplace CHT

Az alább következő 12.1-12.8 feladatokra numerikus választ kérünk. Ehhez a φ és Φ függvények értéktáblázatait is használni kell.

12.1 A binomiális eloszlás normális approximációjának felhasználásával számoljuk ki a következő kifejezés numerikus közelítését:

$$\binom{3600}{2376} 0.64^{2376} 0.36^{1224}.$$

12.2 Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10.000 véletlen számjegy között legfeljebb 968 darab 7-es fordul elő?

• 12.3 Egy mérnök-évfolyam 500 hallgatóból áll, akik közül mindenki a többiektől függetlenül 1/6 valószínűséggel jelenik meg a valószínűségszámítás előadáson. Mi a valószínűsége, hogy a megjelentek beférnek a 100 fős előadóterembe?

12.4 Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a FEJek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5.

12.5 10.000 érmedobás során 5.400-szor volt FEJ az eredmény. Indokolt-e gyanakodnunk arra, hogy a használt érme hamis?

• 12.6 Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a FEJ eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

12.7 Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz 'piros'-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

12.8 Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 poker leosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.

Előzetes megjegyzés a 12.9 és 12.10 feladatokhoz: Ezekben a feladatokban a mintavétel „visszatevéses” módszerrel történik. Azaz: n-szer kérdeznek meg véletlenszerűen kiválasztott egyedeket. Az is előfordulhat (elenyészően kis valószínűséggel), hogy egy egyedet véletlen folytán többször is megkérdeznek.

12.9 Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal, a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűségggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0,1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}(|p' - p| \leq 0.005) \geq 0.95.$$

• 12.10 Amerikai elnükválasztás előtt a Gallup közvéleménykuatató társaság meg akarja becsülni a Demokrata párti szavazók arányát New Hempshire és Texas államokban. Eleve tudják, hogy mindkét államban a Demokrata párti szavazók aránya 40% és 60% között van. Céljuk, hogy mindkét államban az arányokat 0.99-nél nagyobb valószínűséggel, 2% hibahatáron belül állapítsák meg. New Hempshire államban 1.2 millió polgár jugosult szavazni, míg Texas államban 12 millió. E számok alapján statisztikusuk azt állítja, hogy Texasban kb. tízszer akkora mintát kell megfigyelni, mint New Hempshireben. Jó-e ez az okoskodás, vagy rúgják ki a statisztikust? Az utóbbi esetben kb. hányszor nagyobb mintát kell Texasban megfigyelni, mint New Hempshireben?

12.11 (A Poisson eloszlás normális approximációja.)
Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} p([\lambda + x\sqrt{\lambda}]; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p(k;\lambda) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)dy = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

12.12 Legyen X_λ Poisson eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}(X_\lambda) = \lambda$. Számoljuk ki az $Y_\lambda := \sqrt{X_\lambda}$ valószínűségi változó szórásának határértékét, amint $\lambda \to \infty$.