Valószínűségszámítás
4. feladatsor
Függetlenség, geometriai valószínűségek, stb.

4.1 Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?

4.2 Válasszunk találomra egy számot az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmazból, egyenletes eloszlással. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p prím számmal osztható.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prímek és az n szám osztható $p_1, p_2, \ldots,$ p_k-val, akkor az $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ események (teljesen) függetlenek.

(b) Jelöljük C_n-el azt az eseményt, hogy a véletlenszerűen kiválasztott szám n-hez relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}(C_n) = \prod_{p \text{ prím}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

4.3 Legyen $s \in (1, \infty)$ rögzített és $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ a Riemann féle dzeta-függvény. (A végtelen összeg $s > 1$-re konvergens!) Továbbá legyen $p_n = p_n(s) := n^{-s}/\zeta(s)$. Legyen egy $X \in \mathbb{N}$ véletlen szám *eloszlása* $\mathbf{P}(X = n) = p_n$. Értelmezzük bármely r prím számra a következő eseményt:

$E_r := \{$ az X véletlen természetes szám osztható az r prím számmal $\}$

(a) Bizonyítsuk be, hogy az $\{E_r : r \text{ prím } \}$ események teljesen függetlenek.

(b) Adjunk valószínűségszámítási bizonyítást (és ezzel valószínűségszámítási 'ertelmezést is) a híres

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{r:\ r \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{r^s}\right)$$

*Euler furmulá*ra.

(Az Euler formula standard levezetése és értelmezése megtalálható bármely elemi bevezető számelmélet jegyzetben vagy könyvben.)

4.4 (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy két egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény küzül legalább az egyik legalább két találatos?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan öt darab öttalálatos szelvény lesz?

4.5 Egy tesztrendszerű vizsgánál minden diáknak 20 kérdésre kell igennel vagy nemmel felelni. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó az egyes kérdésekre egymástól függetlenül p valószínűséggel tudja a helyes választ, q valószínűséggel azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, r valószínűséggel nem tudja a helyes választ és ennek tudatában van ($p+q+r=1$). Ha a vizsgázó tudja, hogy egy kérdésre nem tudja a helyes választ, akkor találomra ír igent vagy nemet $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgázó legalább 19 kérdésre helyesen válaszol?

4.6 Számítsuk ki a $\mathbf{P}(A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n)$ valószínűséget, ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenek és mindegyiknek a valószínűsége p.

4.7 Egy országban az A, B, C és D városok között a következő közvetlen utak vannak: $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$. Egy téli éjszaka mind az öt útszakaszon p valószínűséggel képződik hóakadály, kölcsönösen függetlenül egymástól. Mi a valószínűsége annak, hogy másnap reggel mégis el lehet jutni A-ból D-be? Adjunk számszerü eredményt $p = 1/2$-re. Próbáljuk megindokolni az utóbbi választ az első kérdésre kapott formula használata nélkül is.

4.8 (Stefan Banach gyufásdoboz-problémája)

(a) Egy szórakozott matematikus vesz két doboz gyufát. Mindkét doboz n szál gyufát tartalmaz. Egyik dobozt a bal-, másikat a jobb zsebébe teszi. Valahányszor pipára akar gyújtani, véletlenszerűen kiveszi az egyik dobozt és abból elhasznál egy szál gyufát. Egyik alkalommal azt veszi észre, hogy az elővett gyufásdoboza már üres. Mi annak a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan k elhasználatlan gyufaszál van még?

(b) A fenti kérdésre adott válasz segítségével találjunk egyszerű kifejezést az alábbi összegre:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}.$$

4.9 Az A, B és C pontokat válasszuk véletlenszerűen, egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül egy kör kerületén. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ABC háronszög hegyesszögű?

4.10 Egy ropit két, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk? (Ez nehezebb!!!)

(c) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb mint az $a \in [l/3, l]$ rögzített szám? (l a ropi hossza)

4.11 Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen letörünk egy-egy darabot. A törési pontokat egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással választjuk ki.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk?

4.12 Három űrhajó leszáll a Marsra, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással választott pontokra. Két űrhajó akkor tud *közvetlen* rádió kapcsolatba lépni egymással, ha a Mars középpontjából induló helyzetvektoraik hegyesszöget zárnak be egymással. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a bármely két űrhajó kommunikálni tud egymással (szükség esetén a harmadik űrhajó közvetítésével) $(\pi + 2)/(4\pi)$.

4.13 (a) Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. A kerületen elhelyezkedő pontok egy konvex sokszöget katároznak meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e sokszög lefedje a kör középpontját?

(b) Egy kör belsejében válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka lefedje a kör középpontját?