Valószínűségszámítás
5. feladatsor
Diszkrét alószínűségi változók I:
Binomiális-, Poisson-, geometriai eloszlás

5.1 Egy n egymástól függetlenül működő alkatrészből álló renszert figyelünk meg egymás utáni, azonos hosszúságú időperiódusokban. Feltesszük, hogy minden egyes alkatrész működése vagy nem működése egy periódusban független attól, hogy működött-e vagy sem a többi periódusban. A rendszer működésében akkor van fennakadás, ha legalább k alkatrész nem működik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez először az m-edik periódusban következik be, ha p annak a valószínűsége (minden alkatrészre), hogy egy alkatrész egy periódusban működjék?

5.2 Bizonyítsuk be, hogy a Poisson eloszlásnál a $k = \lfloor \lambda \rfloor$-hez tartozó valószínűség a maximális. Ha λ nem egész szám, akkor csak ez az egy tag maximális, ha azonban λ egész, akkor $p(\lambda, \lambda) = p(\lambda - 1, \lambda)$.

5.3 Legyenek M, N, n nemnegatív egészek, úgy, hogy $M \leq N$ és $n \leq N$. A hipergeometrikus eloszlást a köv. kifejezés értelmezi:

$$h_{N,M,n}(k) := \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen n nemnegatív egész és $p \in [0, 1]$. A binomoális eloszlást a köv. kifejezés értelmezi:

$$b_{p,n}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha rögzített n és k mellett $N \to \infty$, $M \to \infty$ úgy, hogy $\frac{M}{N} \to p$, akkor $h_{N,M,n}(k) \to b_{p,n}(k)$.

5.4 (a) Hány (egymástól független) bridge-leosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász Északnak jusson, legalább 0.5 legyen?

(b) Hány (egymástól független) bridge-leosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász egy kézbe jusson, legalább 0.5 legyen?

5.5 Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

5.6 Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több mint egy sajtóhuba van?

5.7 Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

5.8 Tegyük fel, hogy a világűr egy bizonyos tartományában két fajta (A és B típusú) csillag van. Az A típusú csillagok számának eloszlása λ paraméterű $p(k;\lambda)$, míg a B típusúaké μ paraméterű $p(k;\mu)$ Poisson eloszlás. Az A-, ill. B típusú csillagok száma egymástól független. Bizonyítsuk be, hogy a világűr e tartományában lévő csillagok száma $p(k;\lambda+\mu)$ Poisson eloszlású. Értelmezzük és fogalmazzuk meg az állítást absztrakt terminusokban.

5.9 Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

1. az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyí időegységekre osztjuk,
2. feltesszük, hogy $p \in (0,1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,
3. továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább három másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a köv. három másodpercben lesz-e forgalom.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utcán átmenni óhajtó gyalogosnak 0, 1, 2, 3, 4 másodpercig kell várnia áthaladás előtt. (Ne próbáljanak *általános* képletet felírni — ez egyelőre nehéz.)

5.10 Egy pók által rakott peték száma $p(k;\lambda)$ Poisson eloszlású. Az egyes peték egymástól függetlenül p valószínűséggel fejlődnek ki (ill. $q = 1-p$ valószínűséggel halnak el). Bizonyítsuk be, hogy a pók kifejlődött gyermekeinek száma $\mu = p\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású. Értelmezzük és fogalmazzuk meg absztrakt terminusokban az állítást.

5.11 (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1000 egymásutáni póker leosztásban legalább négyszer van fullunk?
(b) Számoljuk ki a fenti valószínűséget numerikusan a Poisson approximáció segítségével.

5.12 1000 megkülönböztethető golyót helyezünk véletlenszerűen 10000 dobozba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 25 dobozba legalább 4 golyó essék?

5.13 Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

5.14 Legyenek $p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda = pn \in (0,\infty)$ rögzítve. Továbbá: $a_k := b(k;p,n)/p(k;\lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy amint $k = 0,1,2,\ldots$ növekszik
(a) a_k először növekszik, majd csökken és a maximális értékét $\lfloor\lambda+1\rfloor$-nál éri el.
(b) a_k először kisebb, mint 1, majd 1 felé nő, majd újból 1 alá csökken.

5.15 (Fakultatív: csak kedvtelésből csinálják ...)
Bizonyítsuk be, hogy a binomiális eloszlás Poisson approximációjában a konvergencia k-ban egyenletes, azaz

$$\lim\left(\sup_k |b(k;p,n) - p(k;\lambda)|\right) = 0,$$

amint $p \to 0$, $n \to \infty$ úgy, hogy $pn \to \lambda \in (0,\infty)$.

5.16 Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

$$\sum_{k=0}^{n} kb(k;p,n) = np, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 b(k;p,n) = n^2p^2 + np(1-p);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp(k;\lambda) = \lambda, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k;\lambda) = \lambda^2 + \lambda.$$

5.17 Bizonyítsuk be és értelmezzük a valószínűségszámítás terminusaiban a következő azonosságokat:

$$\sum_{l=0}^{k} b(l;p,n_1)b(k-l;p,n_2) = b(k;p,n_1+n_2),$$

$$\sum_{l=0}^{k} p(l;\lambda_1)p(k-l;\lambda_2) = p(k;p,\lambda_1+\lambda_2).$$