Valószínűségszámítás
6. feladatsor
Diszkrét alószínűségi változók II: várható érték, szórásnégyzet, stb.

6.1 Legyenek X_1 és X_2 független, $p(k;\lambda_1)$ ill. $p(k;\lambda_2)$ Poisson eloszlású valószínűségi változók.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ eloszlása $p(k;\lambda_1 + \lambda_2)$ Posson eloszlás.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ *ismeretében* X_1 *feltételes eloszlása binomiális,* azaz:

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}.$$

6.2 Legyenek X, Y és Z független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók.

(a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(X = Y), \quad \mathbf{P}(X \geq 2Y), \quad \mathbf{P}(X + Y \leq Z).$$

(b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

6.3 Legyenek X és Y független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be *számolás nélkül*, hogy $X + Y$ *ismeretében* X *feltételes eloszlása* egyenletes, azaz:

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

6.4 (a) Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi az összes fej-dobások számának várható értéke?

(b) Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás eredménye azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

6.5 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal, mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha
(a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),
(b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

6.6 Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának, illetve minimumának várható értéke?

6.7 (a) Határozzuk meg az ötös lottó találatok számának, várható értékét egy találomra kitöltött szelvény esetén.
(b) Számítsuk ki az ötös lottó sorsoláson kihúzott legnagyobb, illetve legkisebb szám várható értékét.

6.8 Legyen X nem-negatív egész értékű valószínűségi változó és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i).$$

6.9 Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenkémt egy lövést végeznek?

6.10 Számítsuk ki az $(1 + X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:
(a) ha X $b(k; p, n)$ binomiális eloszlású;
(b) ha X $p(k; \lambda)$ Poisson eloszlású.

6.11 (a) Legyenek X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}(X) < \infty$ és $\mathbf{E}(Y) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\min\{X, Y\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)\mathbf{P}(Y \geq i).$$

(b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív egész értékű X_1, X_2, $\ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről felteszszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X_j \geq i).$$

(c) Az (a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\max\{X, Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \mathbf{P}(X \leq i)\mathbf{P}(Y \leq i)\right].$$

6.12 Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1 - p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, ill. a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\ldots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\ldots$, akkor $X = 1$, $Y = 2\ldots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(Y^2)$, $\mathbf{Var}(X)$, $\mathbf{Var}(Y)$, $\mathbf{Cov}(XY)$.

6.13 Legyen X nemnegatíegész v értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma
($\mathbf{E}(X^2) < \infty$). Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \geq k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{Var}(X)$ segítségével.

6.14 Legyen X pozitív értékű valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy $(\mathbf{E}(X))^{-1} \leq \mathbf{E}(X^{-1})$. (Megjegyzés: ez a Jensen egyenlőtlenség legegyszerűbb sajátos esete.)