Valószínűségszámítás
10. feladatsor
Együttes eloszlások, valószínűségi változók függvényei II.

10.1 Általánosítsuk a fentieket (különös tekintettel a monotonságra és a limeszekre) $n > 2$ valószínűségi változó együttes eloszlására.

10.2 Mutassunk példát olyan kétváltozós $F(x, y)$ függvényre, amely rendelkezik az eloszlásfüggvények (b) és (c) tulajdonságával, mindkét változójában külön-külön monoton nem-csökkenő, de nem (erősen) monoton a fenti (a) értelemben. Miért nem lehet egy ilyen függvény együttes eloszlásfüggvény?

10.3 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

10.4 Legyenek $F(x)$ és $G(y)$ egydimenziós valószínűségi eloszlásfüggvények és $\alpha \in [-1, 1]$ rögzített. Bizonyítsuk be, hogy

$$H(x, y) = F(x)G(y)\big(1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))\big)$$

együttes eloszlásfüggvény, amelynek marginálisai $F(x)$, illetve $G(y)$.

10.5 Legyen (X, Y) az $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordináta-párja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

10.6 Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y) & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat.

10.7 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.

10.8 (a) Legyen $(X_1, X_2, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ (együttesen) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Bizonyítsuk be, hogy ha korrelálatlanok (azaz páronkénti kovarianciájuk nulla), akkor (teljesen) függetlenek is. (Azaz: együttes Gauss eloszlás + korrelálatlanság $\Rightarrow$ függetlenség.)
(b) Legyenek X és Y független $N(0.1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy az $U := (X + Y)/\sqrt{2}$ és $V := (X - Y)/\sqrt{2}$ valószínűségi változók is függetlenek és $N(0, 1)$ eloszlásúak.

10.9 Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X, ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}(Z = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(Z = 0)$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \qquad U := ZX + (1 - Z)\max\{X, Y\},$$

$$V := ZX + (1 - Z)\min\{X, Y\}.$$

10.10 Legyenek X, Y és Z független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
(a) Határozzuk meg az $S := Y - X$ és $T := Z - Y$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét.
(b) Határozzuk meg az $U := [X]$ és $V := X - [X]$ valószínűségi változók együttes eloszlását.

10.11 Legyenek X és Y független, $CAU(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $Z := (X + Y)/(1 - XY)$ is $CAU(0, 1)$ eloszlású.
Útmutatás: Használjuk a $\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$ azonosságot.

10.12 Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.

10.13 (a) A $[0,1]$ intervallumban egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

(b) Egységnyí oldalhosszú négyzet belsejében egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

10.14 Meghatározandó az $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ véletlen vektorok által definiált parallelogramma területének várható értéke a következő három esetben:

(a) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a sík egységkörének kerületén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

(b) $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ egymástól független standard Gauss eloszlású kétdimenziós vektorváltozó. (Azaz az X_1, X_2, Y_1 és Y_2 függetlenek és $N(0,1)$ eloszlásúak.)

(c) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a tér egységgömbjének felszínén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

10.15 Legyen $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $N(0,1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő véltozókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \quad i = 1, 2, 3.$$

(a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\vec{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömg felszínén.