Valószínűségszámítás
11. feladatsor
A normalis eloszlás (egy- és többdimenziós)

11.1 Legyen X $N(0,1)$ (azaz: standard normális) eloszlású valószínűségi változó. Az alábbi valószínűség-párok közül melyik a nagyobb?
(a) $p_1 = \mathbf{P}(|X| \leq 0.7)$, $p_2 = \mathbf{P}(|X| \geq 0.7)$.
(b) $q_1 = \mathbf{P}(-0.5 \leq X \leq -0.1)$, $q_2 = \mathbf{P}(1 \leq X \leq 2)$.

11.2 Tudva, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$, számoljuk ki a következő integrált

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)dx$$

ahol a valós és pozitív, b és c pedig tetszőleges valós (vagy komplex) konstansok.

11.3 Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált "abszolút momentumait":

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k dy, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Útmutatás: Páros $k = 2l$-re számoljuk ki és használjuk a köv. kifejezést:

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} dy \bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2l + 1$-re hajtsuk végre a $z = y^2$ változócserét az A_k-t definiáló integrálban.

11.4 Ellenőrízzük a következő két hatványsorfejtés érvényességét és mutassuk ki, hogy konvergencia sugaruk végtelen:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!2^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{8 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \ldots \right).$$

11.5 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}(X > x) \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

Útmutatás: Differenciáljuk az egyenlőtlenség-lánc mindhárom tagját és hasonlítsuk össze a deriváltakat.

11.6 Legyen X $N(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó.
(a) Határozzuk meg az $Y := X^2$ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét, $m = 0$ esetben.
(b) Határozzuk meg a $Z := \exp(X)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ esetén. Számoljuk ki $\mathbf{E}(Z)$-t és $\mathbf{Var}(Z)$-t. (*Megjegyzés:* a (b) esetben az u.n. log-normális eloszlásról van szó.)

11.7 Emberek egy bizonyos csoportjának az átlagos testsúlya m kg, a testsúlyok szórása pedig 3 kg. $m = 60$ ill. $m = 10$ esetén határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testsúlya az átlagtól nem tér el 5 kg-nál többel, ha
(a) a testsúly normális eloszlású;
(b) a testsúly log-normális eloszlású;

11.8 Legyen X valószínűségi változó $N(0, 1)$ (azaz standard normális) eloszlású. Határozzuk meg a következő várható értékeket és szórásnégyzeteket:
(a) $\mathbf{E}(X \cos(X))$, $\mathbf{E}(X/(1 + X^2))$, $\mathbf{E}(\sin(X))$;
(b) $\mathbf{E}(\cos(X))$, $\mathbf{Var}(\cos(X))$, $\mathbf{Var}(\sin(X))$.

11.9 Az X és Y valószínűségi változók függetlenek és azonos $N(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk az $U := X + Y$ és $V := X - Y$ valószínűségi változókat. Függetlenek lesznek-e egymástól U és V?

11.10 Legyen X $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \mathrm{sign}(1 - |X|) \cdot X$.
(a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.
(b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

11.11 Legyenek X és Y független és azonos $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2+Y^2)/2}(1+X^2+Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

11.12 Legyenek X és Y független $N(0,1)$. illetve $N(0,2)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:
(a) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$,
(b) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 2\}$,
(c) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$,
(d) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 0, |x| \leq 1, y \geq -2\}$,
(e) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq 1\}$,
(f) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq c^2\}$.

11.13 Egy folyó feletti híd téglalap alakú, melynek koordinátái Descartes féle koordináta rendszerben eleget tesznek a következő feltételeknek: $|x| \leq 10$, $|y| \leq 100$ (valamilyen hossz-egységekben). Tűzérségi támadás esetén a lövedék beesésének $(X;Y)$ pontja (ugyanabban a koordináta rendszerben), kétdimenziós normális eloszlású, független komponensekkel és $\sigma_X = 10$, $\sigma_Y = 40$ szórásokkal. Az $(\mathbf{E}(X);\mathbf{E}(Y))$ koordinátájú pontot "célpont"-nak nevezzük. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a lövedék eltalálja a hidat, ha a célpont:
(a) $(0,0)$, (b) $(10,0)$, (c) $(5,20)$.

11.14 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X,Y) koordinátájú véletlen pont a $(0;3),(4;0),(1.8;5.4),(5.8;2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

11.15 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az események a valószínűségét, hogy az (X,Y) koordinátájú véletlen pont az ABC háromszögbe essék, a következő esetekben:
(a) $A = (0;0)$, $B = (1;1)$, $C = (2;0)$.

(b) $A = (0;2)$, $B = (2;1)$, $C = (2;2)$.
(c) $A = (2;0)$, $B = (1;1)$, $C = (1;2)$.
Útmutatás: Használjunk szimmetriákat!

11.16 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg az $(X;Y)$ Descartes-koordinátájú pont $(R;\Theta)$ *polárkoordinátáinak* együttes eloszlását.

11.17 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $(X;Y)$ koordinátájú véletlen pont beleesik az
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$ körgyűrűbe;
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \min(|x|,|y|) \leq \max(|x|,|y|) \leq 3\}$ tartományba;
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq |x|+|y| \leq 3\}$ tartományba.

11.18 Az $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása nemelfajult két dimenziós normális eloszlás $\vec{0} = (0,0)$ várható értékkel és $\left(\sigma_{i,j}\right)_{i,j=1}^{2}$ kovariancia mátrixszal ($\sigma_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$, $\sigma_{1,1} > 0$, $\sigma_{2,2} > 0$, $\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}\sigma_{2,1} > 0$). Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

(a) $p_{00} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$; (b) $p_{01} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \leq 0)$;

(c) $p_{10} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \geq 0)$; (d) $p_{10} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \leq 0)$.

11.19 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg k-nak azt a minimális értékét, amelyre $\mathbf{P}(\max(|X_1|,|X_2|,\ldots,|X_k|) \geq 2) \geq 1/2$.

11.20 Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?