Tóth Bálint: Val. szám

—1— 1

1) Valószínűségszámítási jellegű állítások / kérdések / stb

(A) Fej vagy írást játszunk.

- annak a valószínűsége, hogy egyszer dobva "F" az eredmény $= 1/2$
- annak a valószínűsége, hogy $2n$-szer dobva az F-ek és I-k száma pontosan egyenlő (n-el) $P = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ (

$$\sim (2\pi n)^{-1/2}$$

(B) n megkülönböztethető golyót véletlenszerűen helyezünk r urnába. Annak a valószínűsége, hogy minden egyes urnában legfeljebb egy golyó legyen

$$P = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{r^n} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{r}\right)$$

n = egy csoportban levő emberek száma

$r = 365$

] "egybeeső" szül. napok problémája

ha $r \leq 22$: $P > \frac{1}{2}$

$r \geq 23$: $P < \frac{1}{2}$

 megtett számaim: 5, 23, 42, 49, 78 (2)

(C) Veszek egy lottószelvényt. Annak a valószínűsége, hogy egy árva találatom se legyen

$P \approx 0.75$

(D) Annak a valószínűsége hogy a tanteremben lévő összes levegő - molekula a terem jobb felébe gyűljön (és a bal felében megfulladjunk)

$P \sim 2^{-10^{26}}$ (elenyésző)

(2) Elemezzük a fenti kijelentéseket:

- kísérletet / megfigyelést végzünk
- egy esemény
- valószínűségét számoljuk ki / becsüljük meg

Matematikai nyelven:

kísérlet lehetséges ~~(elemi)~~ kimenetelei: Ω halmaz

(A) $\Omega = \{F, I\}$, $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}) \mid \omega_j \in \{F, I\}\} = \{F, I\}^n$

(B) $\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_j \in \{1, 2, \dots, r\}\} = \{1, 2, \dots, r\}^n$

(C) $\Omega = \{ (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid 1 \le b_1 < b_2 < \dots < b_5 \le 90 \}$

(D) $\Lambda = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3] \subset \mathbb{R}^3$

$\Omega = \{ ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)) \mid (x_j, y_j, z_j) \in \Lambda \}$

$= \Lambda^N$

Események $\quad E \in \mathcal{P}(\Omega)$ (a diszkrét esetben)

$E \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

↑ események σ - algebrája

(A) $E = \{F\}$, $\quad E = \{ (\omega_1, \dots, \omega_{2n}) \mid \#\{i : \omega_i = F\} = n \}$

(B) $E = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \Omega \mid i \ne j \Rightarrow a_i \ne a_j \}$

(C) $E = \{ (b_1, \dots, b_5) \in \Omega \mid \{b_1, \dots, b_5\} \cap \{5, 23, 42, 49, 78\} = \emptyset \}$

(D) $E = \{ ((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)) \in \Omega \mid \forall i : \ x_i \in [0, L_1/2] \}$

~~Műveletek~~: Két sajátos esemény

$\emptyset$: lehetetlen, Ω : biztos

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ komplementer

$A \cup B$ $\quad$ A vagy B

$A \cap B$ $\quad$ A és B

stb.

Valószínűségek

$$P : \{\text{események}\} \longrightarrow [0,1]$$

(általában) valamilyen szimmetria megfontolás alapján
"egyenletes mérték" Ω-n

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Empirikus megközelítés:

m kísérletező, n-szer kísérletezik

kísérletező személy \ kísérlet sorszáma	1	2	3	...	n	
(1)	F	F	I	- - - -	F	$n_F^{(1)}/n$
(2)	F	I	F	- - - -	I	$n_F^{(2)}/n$
⋮						⋮
(m)	I	I	F	- - - -	F	$n_F^{(j)}/n$

"empirikus tény" ha $m \gg 1$, $n \gg 1$

az $\frac{n_F^{(j)}}{n}$ relatív gyakoriságok zöme $(j = 1, 2, \ldots, n)$

egy szám $(= \frac{1}{2})$ "köré tömörül"

.... NSZT.

(3) A matematikai konstrukció

eseménytér : Ω (egyelőre többnyire diszkrét)

eseményalgebra : $\mathcal{P}(\Omega)$

[vagy $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, zárt a megszámlálható halmazelméleti műveletekre ...]

valószínűség: Ω diszkrét $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

$$p: \Omega \longrightarrow [0,1], \quad \sum_i p(\omega_i) = 1$$

$$A \in \mathcal{A} : \quad P(A) := \sum_{i:\, \omega_i \in A} p(\omega_i)$$

P alaptulajdonságai : $P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$:
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

sőt: ii') $A_k \in \mathcal{A}$ $k = 1, 2, \dots$; $k \neq l \rightarrow A_k \cap A_l = \emptyset$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

[Általában $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$]

(5)

P-ből rekonstruálható p: $p(\omega_i) = P(\{\omega_i\})$

Comment: ha Ω nem diszkrét...

A $p : \Omega \to [0,1)$ definiálása = a probléma definiálása

Vissza a példákhoz:

(A) $\Omega = \{F, I\}^{2n}$ egyenletes vsz. mértékkel

$$\forall (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \quad p(\omega_1, \dots, \omega_{2n}) = 2^{-n}$$

$$\# \{ (\omega_1, \dots, \omega_{2n}) \mid \#\{j : \omega_j = F\} = n \} = \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

(B) $\Omega = \{1, 2, \dots, r\}^n$ egyenletes vsz.

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \Omega : \quad p(a_1, \dots, a_n) = r^{-n}$$

$$\# \{ (a_1, \dots, a_n) \in \Omega \mid i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \} = \frac{r!}{(r-n)!}$$

$$P(E) = \frac{r!}{(r-n)!} \cdot \frac{1}{r^n}$$

(C) $\Omega = \{ (b_1, \dots, b_5) \mid 1 \le b_1 < \dots < b_5 \le 90 \}$ egyenletes

$$\forall \underline{b} \in \Omega \quad p(\underline{b}) = \binom{90}{5}^{-1}$$

becsüljük meg $P=\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{r}\right)$ -t

$r \gg n$ esetén:

$$\ln P = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{j}{r}\right) \approx -\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{r} = -\frac{n(n-1)}{2r}$$

$$P \approx e^{-\frac{n^2}{2r}} = \tilde{P}$$ érvényes, ha $\boxed{n^2 \lesssim r}$

numerikusan: $r = 365$

	P	$\tilde{P}$
$n = 22$	0.5243	0.5153
$n = 23$	0.4927	0.4845

$\#\{(b_1,\dots,b_5):\ \{b_1,\dots,b_5\}\cap\{5,23,42,49,78\}=\emptyset\}$

$=\binom{85}{5}$

$$P(E)=\frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}=\frac{85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}\approx 0.75$$

(D) $\Omega=\left([0,L_1]\times[0,L_2]\times[0,L_3]\right)^N$ egyenletes vsz.

$E=\left([0,L_1/2]\times[0,L_2]\times[0,L_3]\right)^N$

$$P(E)=\frac{|E|}{|\Omega|}=2^{-N}$$

Még egy példa: végtelen (megsz.) eseménytér

a, b, c játszik

a vs b kezd, ... vesztes kiáll, várakozó beáll, ...

mindaddig, amíg valaki kétszer egymásután nyer. Ő a győztes

$\frac14(1+\frac18+\frac1{64}+\dots)+\frac1{16}(1+\frac18+\dots)=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac18}$

$\Omega=\{$ aa, acc, acbb, acbaa, ..., bb, bcc, bcaa, bcabb, ..., acbacbacbacb..., bcabcabca... $\}$

$p(\omega)=2^{-(\omega \text{ hossza})}$ *értelmezések*

$\mathbb{P}$(a győz) = P(b győz) = ? $\left(\frac{5}{14}\right)$

P(c győz) = ? $\left(\frac{4}{14}\right)$

"Inclusion - exclusion": Szita formula:

Standard általános iskolai feladat: Egy osztályban t/ki tanul valamilyen idegennyelvet: F, I, G legalább egyiket.

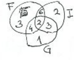
F: 15; I: 13; G: 10;

F&I: 8; I&G: 5; G&F: 6

F&I&G: 2.

• Hány tanulója van az osztálynak?

•• Véletlenszerűen kiválasztunk egy tanulót. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább két nyelvet tanuljon?



• 21, •• $\frac{5}{7}$

Elbonyolódik, ha nő a különböző csoportok száma!

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1)$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Tétel (Szita formula) (Ω, P) vsz. mező %

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ események

$I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ $\quad A_I := \bigcap_{k \in I} A_k$

Ekkor: $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} P(A_I)$$

Másképpen kifejezve

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} P(A_I)$$

Bizonyítás:

Konvencionális jelölés: $\bigcup_{k\in\emptyset} A_k = \emptyset$, $\bigcap_{k\in\emptyset} A_k = \Omega$

$J \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ re legyen

$$C_J := \left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{\ell\in\overline{J}} \overline{A}_\ell\right)$$

Állítás $\{C_J : J \subseteq \{1,2,\dots,n\}\}$ Ω partíciója.

Azaz: (1) $\bigcup_J C_J = \Omega$

(2) $J \cap J' = \emptyset \Rightarrow C_J \cap C_{J'} = \emptyset$

Biz (1) legyen $x \in \Omega$; $J_x := \{k \mid x \in A_k\}$

ekkor $x \in C_{J_x}$ ✓

(2) legyen $k \in J \setminus J'$, ekkor $C_J \subseteq A_k$, $C_{J'} \subseteq \overline{A}_k$ ✓

□ All

%

Tétel bizonyítása:

Alapazonosság: $A_I = \bigcup_{J:\, I\subseteq J} C_J$

Valóban: $\bigcup_{J:\, I\subseteq J} C_J = \bigcup_{K\subseteq \bar{I}} C_{I\cup K} =$

$$= A_I \cap \underbrace{\Big\{ \bigcup_{K\subseteq \bar{I}} \Big(\bigcap_{k\in K} A_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{\ell\in \bar{I}\setminus K} \bar{A}_\ell\Big)\Big\}}_{=\,\Omega \text{ fenti állítás alapján}}$$

$$P(A_I) = \sum_{J:\, I\subseteq J} P(C_J) \qquad \text{(additivitás)}$$

Möbius inverzió: Legyen N egy véges halmaz $\{1,\dots,n\}$

$f, g : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$

(1) $f(I) = \sum_{J:\, I\subseteq J} g(J)$

(2) $g(I) = \sum_{J:\, I\subseteq J} (-1)^{|J\setminus I|} f(J)$

$(1) \iff (2)$

Következmény: $P(C_I) = \sum_{J:\, I\subseteq J} (-1)^{|J\setminus I|} P(A_J)$

 (nem kell) (1d)

Bizonyítás: (Möbius)

(1) ⟹ (2):

$$\sum_{J:\, I\subseteq J} (-1)^{|J\setminus I|} f(J) \overset{(1)}{=} \sum_{J:\, I\subseteq J} (-1)^{|J\setminus I|} \sum_{K:\, J\subseteq K} g(K)$$

$$= \sum_{K:\, I\subseteq K} g(K) \cdot \underbrace{\sum_{L\subseteq K\setminus I} (-1)^{|L|}}_{=\ \delta_{\emptyset,\, K\setminus I}} = g(I)$$

(2) ⟹ (1)

$$\sum_{J:\, I\subseteq J} g(J) \overset{(2)}{=} \sum_{J:\, I\subseteq J} \sum_{K:\, J\subseteq K} (-1)^{|K\setminus J|} f(K)$$

$$= \sum_{K:\, I\subseteq K} f(K) \sum_{L\subseteq K\setminus I} (-1)^{|L|} = f(I)$$

□ Möbius

Tétel bizonyítása:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\Big) = P(C_\emptyset) = \sum_{I\subseteq\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|} P(A_I)$$

□ Szita

Általánosabban:

$$\bigcup_{I:\ \#I=r} C_I = \{\omega\in\Omega \mid \omega \text{ pontosan } r \text{ db } A_k\text{-ban van benn}\}$$

$$P\Big(\bigcup_{I:\ \#I=r} C_I\Big) = \sum_{I:\ \#I=r} P(C_I) =$$

$$\sum_{I:\ \#I=r} \cdot \sum_{J:\ I\subseteq J} (-1)^{|J\setminus I|} P(A_J) =$$

$$\sum_J P(A_J)\cdot \sum_{\substack{I:\ I\subseteq J\\ \#I=r}} (-1)^{|J\setminus I|}$$

$$\boxed{P\Big(\text{pontosan } r \text{ darab } A_k \text{ esemény következik be, } k\in\{1,2,\dots,n\}\Big) = \sum_{J\subseteq\{1,2,\dots,n\}} P(A_J)\binom{|J|}{r}\cdot(-1)^{|J|-r}}$$

Alkalmazások ....

1, kalapcsere / levél-borítékba /

A_i: i a saját kalapját kapja $i\in\{1,2,\dots,n\}$

$$P(A_I) = \frac{(n-|I|)!}{n!}$$

$$P(\text{senki sem kapja a saját kalapját}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}$$

$\sim e^{-1}$

Szitaformula bizonyítása indukcióval:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) =$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) =$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} P(A_I) + P(A_{n+1}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} P(A_I \cap A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n+1\} \\ |I|=k}} P(A_I) \qquad \text{QED}$$

Maxwell Boltzmann
Bose Einstein

n golyót r dobozba

- megkülönböztethetőek (M-B)

$$P(\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \dots, \nu_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} r^{-n}$$

$$P(\nu_1 = k) = \sum_{\substack{k_2, \dots, k_r \\ k_2 + \dots + k_r = n-k}} \frac{n!}{k! k_2! \cdots k_r!} r^{-n} =$$

$$= \frac{n!}{k! \, (n-k)!} r^{-n} \underbrace{\sum_{\substack{k_2 \dots k_r \\ k_2 + \dots + k_r = n-k}} \frac{(n-k)!}{k_2! \cdots k_r!}}_{(r-1)^{n-k}}$$

$$= \frac{n!}{k! \, (n-k)!} \left(\frac{1}{r}\right)^k \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-k}$$

- megkülönböztethetetlenek (B-E)

$$P(\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \dots, \nu_r = k_r) = \binom{n + r - 1}{n}^{-1}$$

$$P(\nu_1 = k) = \frac{\binom{(n-k) + (r-1) - 1}{n-k}}{\binom{n+r-1}{n}} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n+r-k-2)!}{(n+r-1)!} \, \frac{(r-1)!}{(r-2)!}$$

limes $\quad n \to \infty \;;\; r \to \infty$

$$\frac{n}{r} \to \lambda \in (0,\infty)$$

M-B $\quad \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\downarrow \; \frac{1}{k!}} \; \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\, r^k}}_{\downarrow \; \lambda^k} \; \underbrace{\left(1-\frac{1}{r}\right)^n}_{\downarrow \; e^{-\lambda}} \; \underbrace{\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-k}}_{\downarrow \; 1} \; = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

B-E $\quad \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \; \frac{(n+r-k-2)!}{(n+r-2)!}}_{\to \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k} \quad \underbrace{\frac{r-1}{n+r-1}}_{\to \frac{1}{1+\lambda}} \; = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k \cdot \frac{1}{1+\lambda}$

Extra HF: $\quad$ M-B-re: $\; P(\nu_1 = k_1, \dots, \nu_j = k_j) \qquad j < r$
és a limesz

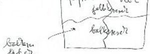
Tóth Bálint — 16 —

(1)

Val szám (2) Feltételes vsz + függetlenség

Feltételes valószínűség:

- N személyből álló csoport; ebből N_F férfi ($N - N_F$ nő); N_B balkezes, N_{BF} balkezes férfi



véletlenszerűen kiválasztunk egy személyt

$$P(\text{férfit}) = \frac{N_F}{N} = p_F$$

$$P(\text{balkezest}) = \frac{N_B}{N} = p_B$$

$$P(\text{balkezes férfit}) = \frac{N_{BF}}{N} = p_{BF}$$

$$P(\text{balkezest} \mid \text{férfit}) = \frac{N_{BF}}{N_F} = \frac{N_{BF}}{N} \Big/ \frac{N_F}{N} = p_{B|F} = \frac{p_{BF}}{p_F}$$

- Wimbledoni döntő Becker – Sampras (egyenlő esél minden szetben)

5-ből 3-at kell megnyerni.

$\Omega = \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$

$\Omega_3 = \{bbb, sss\}$ $\quad p(bbb) = p(sss) = \frac{1}{8}$

$\Omega_4 = \{bbsb, bsbb, sbbb, ssbs, sbss, bsss\}$

$$p(bbsb) = \dots = p(bsss) = \frac{1}{16}$$

$\Omega_5 = \{bbssb, bsbsb, sbbsb, bssbb, sbsbb, ssbbb, ssbbs, sbsbs, bssbs, sbbss, bsbss, bbsss\}$

$$p(bbssb) = \dots = p(bbsss) = \frac{1}{32}$$

$P(\Omega) = P(\Omega_3) + P(\Omega_4) + P(\Omega_5) = \frac{2}{8} + \frac{6}{16} + \frac{12}{32} = 1$

$B = \{$Becker győz$\}$

$B_i = \{$Becker nyeri az i-edik szettet$\}$ $\quad i = 1, 2,$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(B \mid B_1) = \frac{P(B \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{6}{32}}$$

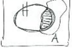
$$= \frac{11}{16}.$$

$$P(B \mid B_1 \cap B_2) = \frac{P(B \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)} = \dots = \frac{7}{8}$$

Definíció Ω, P val. mező

$$H \subset \Omega, \quad P(H) > 0$$

$$A \subset \Omega, \quad P(A|H) := \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$



A relatív súlya H-ban

Még egy példa:

Három zárt doboz. Egyikben 100 \$! Egyet kiválasztok (véletlenül). Játékvezető kinyitja a másik kettő egyikét, mely üres [választás: érmedobással ⊛, ha kell].
Változtassam-e meg a választásomat?

⊛ F: kisebbik sorszámú dobozt [ha lehet]

	F	I
1	•	•
2	•	•
3	•	•

kizárt

$\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{F, I\}$

hol a 100\$ van — Játékvezető érméje

Először ① dobozt választom, Játékvezető kinyitja ② dobozt, mely üres

- $P(A \cup B | H) = P(A|H) + P(B|H) - P(A \cap B | H)$
  általában: feltételes szita-formula
- $\tilde{P}(A) := P(A|H)$ is valószínűség)

<u>További példa</u>: két gyermekes családokban

$\{LL, LF, FL, FF\}$ $\quad p = \frac{1}{4}$ $\quad \forall$ komb

$H = \{$ A kétgyermekes Kovács családnak van egy fia $\}$

$A = \{$ A kétgyermekes Kovács családnak mindkét gyermeke fiú $\}$

$$P(A \mid H) = \frac{1}{3} \quad (\text{és nem } \tfrac{1}{2})$$

(4)

Egyszerű következmények

A, B, C

kártyapakliból egymás után

① $P(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1) =$

$$P(A_n \mid A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \cdot$$
$$P(A_{n-1} \mid A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \cdot$$
$$\dots$$
$$P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

roppant hasznos ha a feltételes valség adottak természetes módon

kihagy %

Pl.: ~~P(a köv. játszma megnyerése | ismerve a már lejátszott játszmák eredményeit)~~

~~P((k+1)-dik játszma megnyerése | ismerve az már lejátszott k játszma eredményét) = adott~~

~~A, B játszik egymás ellen n játszmát~~

~~$\Omega = \{+1, -1\}^n = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i = +1 \text{ v. } -1\}$~~

~~$P(\{\omega_{k+1} = +1\} \mid \omega_1, \omega_2 \dots \omega_k \text{ ismert}) =$~~

~~$\frac{k + \sum_{i=1}^{k} \omega_i}{2k}$~~ ~~(például)~~

%

urna modellek:

Egy urnában $\left.\begin{array}{l} a \text{ fehér} \\ b \text{ fekete} \end{array}\right|$ golyó

kihúzunk egyet, majd visszahelyezünk

$\left.\begin{array}{l} 1+c \text{ db azonos} \\ d \text{ db ellenkező} \end{array}\right\}$ színűt

$$P(\text{fehér}, \text{fehér}, \text{fekete}) =$$

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+c}{a+c+b+d} \cdot \frac{b+2d}{a+2c+b+2d}$$

Speci: ~~általá~~ ~~Pólya~~ ~~urna~~

$c = d = 0$ egyszerű visszatevéses

$c = -1,\ d = 0$ egyszerű visszatevés nélkül

$c > 0,\ d = 0$ Pólya

$c = -1,\ d = 1$ Ehrenfest

(2) teljes valószínűség "tétele" (lft)

Legyen $H_1, \dots, H_n$ Ω partíciója

$i \neq j$: $H_i \cap H_j = \emptyset$ & $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

$\forall H_i \quad P(H_i) > 0$

$A \subseteq \Omega$: $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$ diszjunkt

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)\, P(H_i)$$

Bayes motivációja: H.I.V. test

(3) Bayes szabály (tétel)

Ismerve egy okozatot következtetni akarunk a lehetséges okok valószínűségére

$H_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ közös diszjunkt események teljes rendszere

$P(H_i)$ a priori ~~adott~~ ismert

$P(A \mid H_i)$ feltételes valószínűség ismertek

Feltéve hogy A (okozat) bekövetkezik, mi a

H_i $i = 1, 2, \dots, n$ lehetőségek közötti a posteriori (megváltozott) valószínűségei

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}$$

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)\, P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid H_j)\, P(H_j)}$$ Bayes formula

Példa: egy populációban #nők = #férfiak

férfiak 5%-a } színvak
nők 0.25%-a }

Véletlenszerűen kiválasztunk egy színvakot.
Mi a (aposteriori) esélye annak, hogy a kiválasztott személy férfi?

$$P(F) = P(N) = \tfrac{1}{2} \; ; \quad P(S \mid F) = \tfrac{1}{20}$$

$$P(S \mid N) = \frac{25}{10.000} = \frac{1}{400}$$

$$P(F \mid S) = \frac{P(S \mid F)\, P(F)}{P(S \mid F)\, P(F) + P(S \mid N)\, P(N)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{400}}$$

$$= \frac{20}{21}$$

(7)

Még egy példa Bayes-re:

p_k gyerek számának eloszlása $k = 0, 1, 2, \ldots$

egy családban

$$\sum_{k \geq 0} p_k = 1$$

~~k gyerek esetén~~

Feltéve, hogy egy családban k gyerek van, minden F–L variációs egyenlő ~~esélye~~ van

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k \qquad H_0 = \{0\}$$

$$H_k = \{F, L\}^k$$

$$P(H_k) = p_k$$

$$P(0) = p_0 \quad ; \quad P(F) = \frac{1}{2} p_1 = P(L)$$

$$P(FF) = P(FL) = P(LF) = P(LL) = \frac{1}{4} p_2$$

...

$A = \{$ Koreaiáknál csak fiúgyermekük van $\}$

$H_k = \{$ Koreaiáknál k gyermekük van $\}$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1) P(H_1)}{\sum_{k \geq 1} P(A \mid H_k) P(H_k)} =$$

$$= \frac{2^{-1} p_1}{\sum_{k \geq 1} 2^{-k} p_k}$$

Tóth Bálint Valószínűségszámítás 3.

függetlenség

Def esemény függetlensége:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ v.sz. mező

$A, B \in \mathcal{A}$ A és B függetlenek, ha

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

az egyik bekövetkezése semmilyen információt nem szolgáltat a másikra nézve

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)}$$

ez a jó def.

Pl. érme + kocka $A = \{F\}$, $B = \{\text{páros}\}$

Három esemény függetlensége

elég-e a páronkénti függetlenség?

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

Nem elég Pl. 2 kocka $A = \{\text{első páros}\}$, $B = \{\text{második páros}\}$, $C = \{\text{összeg páros}\}$

n esemény függetlensége:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

függetlenek, ha: bárhogy kiválasztunk egy

A_{i_0}-t és ettől különböző

$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$-t

$$P(A_{i_0} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_0})$$

Def $\forall\, I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Ezzel ekvivalens

$$P\Big(\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i \notin I} \bar{A}_i\Big)\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i) \prod_{i \notin I} (1 - P(A_i))$$

$$\boxed{2^n - (n+1) \text{ független egyenlet}}$$

Kis kitérő: részalgebrák függetlensége

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vsz mező.

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ $\mathcal{F}$-nek részalgebrái

$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ függetlenek (a P vsz. szerint), ha bárhogyes választunk $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$-et $A_1, \dots, A_n$ függetlenek (az előbbi def. értelmében)

<u>Pl</u> szorzattér:

$$(\Omega_1, P_1), \dots, (\Omega_n, P_n)$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \in \Omega_j\}$$

$$p((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = p_1(\omega_1)\, p_2(\omega_2) \cdots p_n(\omega_n)$$

$$\mathcal{A}_1 = \{A_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \mid A_1 \subset \Omega_1\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\Omega_1 \times A_2 \times \dots \times \Omega_n \mid A_2 \subset \Omega_2\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A}_n = \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1} \times A_n \mid A_n \subset \Omega_n\}$$

a szorzatmérték szerint $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ függetlenek.

Ha a priori független kísérletek által definiált összetett kísérletet akarunk modellezni: ezt tettük.

Figyelem: .... ha nem per def független eseményeink vannak, nehéz lehet a függetlenség ellenőrzése.

Pl. • a priori függetlenekre ...

• nem a priori függetlenekre

Véletlen szám egyenletes eloszlással $[0, 1]$-ben

$\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ = Borel-algebra

P = Lebesgue mérték

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vsz. mező

$\omega = 0.\omega_1 \omega_2 \omega_3 \ldots$ diadikus alak

$A_j = \{\omega \mid \omega_j = 1\}$

A_j-k függetlenek

Egy számelméleti példa:

$s \in (1,\infty)$ rögzített

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$p(n) = p_s(n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

X véletlen természetes szám, melynek eloszlása

$$P(X=n) = p_n$$

Hogyan állíthatjuk elő? Pl. véletlen szám generátor kiad egy egyenletes eloszlásút $[0,1]$-ben (ω)

$$X(\omega) = \min\{n \mid \sum_{k=1}^{n} p_k > \omega\}$$

r prím, $E_r = \{X \text{ osztható } r\text{-el}\}$
$= \{\omega \mid r \mid X(\omega)\}$

$$P(E_r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kr)^{-s}}{\zeta(s)} = r^{-s}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-s}}{\zeta(s)} = r^{-s}$$

legyenek $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ prímek

$$P(E_{r_1} \cap E_{r_2} \cap \dots \cap E_{r_m}) = \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k \cdot r_1 r_2 \dots r_m)^{-s}}{\zeta(s)} = \dots = (r_1 \cdot r_2 \cdots r_m)^{-s} =$$

$$P(E_{r_1}) P(E_{r_2}) \dots P(E_{r_m})$$

Tehát az

$\{E_r \mid r \text{ prím}\}$ események függetlenek

(az adott eloszlásra nézve)

Euler formula $\qquad \zeta(s)^{-1} = \prod_{r \text{ prím}} (1 - r^{-s})$

Valószínűségi értelmezés:

$$\text{jobboldal} = \prod_{r \text{ prím}} (1 - r^{-s}) = \prod_{r \text{ prím}} P(\overline{E}_r) \quad \text{független}$$

$$= P\Big(\bigcap_{r \text{ prím}} \overline{E}_r\Big)$$

$$= P(\{X \text{ nem osztható egyetlen prímszámmal}\})$$

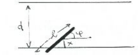
$$= P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Tóth Bálint. Valószínűségszámítás 4.

Geometriai problémák:

① Buffon tű problémája

(George Louis Leclerc, Comte de Buffon
1707 - 1788)



$\underline{\underline{\ell}}$ hosszú tű véletlen-szerűen ledobva egy $\underline{d}$ távolságban lévő párhuzamos egyenes vonalrendszerre.

$$\ell \leq d.$$

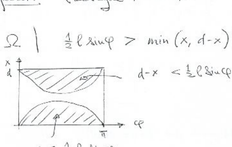
Mennyi a vsz-e annak, hogy a tű átmetsz egy vonalat?

$$\Omega = \{ (x,\varphi) \mid 0 \le x \le d \ , \ 0 \le \varphi \le \pi \}$$

rajta egyenletes (Lebesgue) mérték

$$A = \{ (x,\varphi) \in \Omega \mid \tfrac{1}{2}\ell \sin\varphi > \min(x, d-x) \}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$



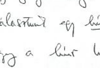
$|\Omega| = d\pi$

$|A| = 2 \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\ell \sin\varphi\right) d\varphi = \ell \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 2\ell$

$$\boxed{P(A) = \frac{2\ell}{\pi d}}$$

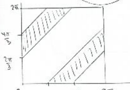
(2) Egységnyi sugarú körön <u>véletlenszerűen</u> kiválasztunk egy <u>húrt</u>. Mi a vsége annak, hogy a húr hossza nagyobb, mint a beírt szabályos háromszög oldalhossza? Bertrand Paradoxon

(A) válasszuk a húr végpontjait egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással a kör kerületén:



$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x,y \le 2\pi\}$

$A = \{(x,y) \in \Omega \mid \frac{2\pi}{3} < x-y < \frac{4\pi}{3}$ vagy $\frac{2\pi}{3} < y-x < \frac{4\pi}{3}\}$

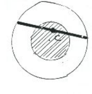


$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}}$$

Megj: Feltételes vsszel még könnyebb

(B) A húr felezőpontja egyértelműen meghatározza magát a húrt.

Válasszuk a húr középpontját véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) a kör belsejében!



$$\Omega = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{r}| < 1 \}$$

$$A = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{r}| < \tfrac{1}{2} \}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}}$$

(C) A húr felezőpontjának a kör középpontjától való távolsága már egyértelműen meghatározza a húr hosszát!

Válasszuk a húr felezőpontjának origótól való távolságát véletlenszerűen (= egyenletesen a $[0,1]$ intervallumban)

$$\Omega = \{ r \mid 0 \leq r \leq 1 \}$$

$$A = \{ r \in \Omega \mid r \leq \tfrac{1}{2} \}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}}$$

 (4)

1. tanulság: ki kell terjeszteni a "vst mérő" fogalmát diszkrétről folytonosra

2. tanulság: A probléma akkor van jól definiálva ha pontosan megmondjuk mi a véletlen teret
Azaz: mi is pontosan a $P(\cdot)$ vst mérték Ω-n

| További geom problémák a 4. feladatsorban |

A vst mérő általános fogalma

Ω - eseménytér [véges diszkrét] kondin számolni etc. folytonos általáb

$\mathcal{F}$ σ-algebra Ω-n

$$\sigma\text{-alg} \begin{cases} \cdot\ \Omega \in \mathcal{F} \\ \cdot\ A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F} \\ \cdot\ A_i \in \mathcal{F} \quad i = 1,2,3,\dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F} \end{cases}$$

P : vst mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en

$$P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

$\cdot\ P(\Omega) = 1$

$\cdot\ A_i \in \mathcal{F},\ i = 1,2,\dots$ és $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

σ-additivitás

(5)

Vsz. mező: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Néhány szó σ-algebrákról, σ-additív mértékekről:

① Ω adott

$\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ σ-algebrák családja

$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ szintén σ-algebra

Köv: $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Ω részhalmazainak egy (tetszőleges) családja

$$\sigma(\mathcal{J}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\ \sigma\text{-alg} \\ \mathcal{J} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}$$ generált σ-alg

Pl: Ω metrikus tér, $\mathcal{J} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ nyílt vagy zárt}\}$

$\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}$ Borel alg Ω-n

② mértékek terjesztés kiterjesztése:

Általában Ω, $\mathcal{R}$ részhalmazok algebrája (nem σ)

$P: \mathcal{R} \longrightarrow (0,1)$ $P(\Omega) = 1$

ha $A_i \in \mathcal{R}$ $\boxed{\text{és } \bigcup A_i \in \mathcal{R}}$ és $A_i \cap A_j = \emptyset$

$\forall A_i$

$\Rightarrow P(\bigcup_i A_i) = \sum P(A_i)$

Akkor P egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{R})$-re

Pl. ① $\Omega = [0,1]$

$\mathcal{R} = \{$ diszjunkt intervallumok ~~~~ megszámlálható uniói $\}$

$$P\Big(\bigcup_i (a_i, b_i)\Big) = \sum_i (b_i - a_i)$$

kiterjed $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{R})$-re ez a Lebesgue

(2) $\Omega = [0,1] \times [0,1)$

$\mathcal{R} = \{$ diszjunkt téglalapok megsz. uniói $\}$

...

(3) $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ \underline{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \cdots) \mid \omega_j = a_j$

$\mathcal{R} = \{ C_{F,\overline{\omega}} \mid F \subset \mathbb{N}$ véges, $\overline{\omega} \in \{0,1\}^F \}$

$C_{F,\overline{\omega}} = \{ \omega \in \Omega \mid \omega_i = \overline{\omega}_i, i \in F \}$

$$P(C_{F,\overline{\omega}}) = p^{\sum_{i\in F} \overline{\omega}_i} (1-p)^{\sum_{i \in F} (1-\overline{\omega}_i)}$$

(pl. $p = \frac{1}{2}$ — érmedobás)

ez rendelkezésben

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás 5.

Diszkrét valószínűségi változó

Val. változó = véletlen szám

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \quad (\mathbb{Z}, \mathbb{R})$$

a véletlen kísérlet kimenetelétől függő szám $X(\omega)$

pl.:
- találataim száma lottó sorsoláskor
- 10 érmedobásból az "Írás"-ok száma
- érmedobás sorozatban az első "Fej" sorszáma
- a XI. ker.-ben ~~nap.~~ ma bekövetkező koccanásos balesetek száma
- $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlással választott szám

~~[illegible]~~

koncentráljunk az $\mathbb{N}$-értékűekre

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező

$$A_k = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \Omega, \qquad k \neq l \Rightarrow A_k \cap A_l = \emptyset$$

$$f_X(k) := P(A_k) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\})$$

f_X az X val. változó <u>eloszlása</u>

$f_X : \mathbb{N} \to [0,1]$, $\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1$

f_X minden lényeges információt tartalmaz X-ről

<u>Vst eloszlás $\mathbb{N}$-en</u>: $f: \mathbb{N} \to [0,1]$, $\sum_k f(k) = 1$

minden val. eloszlás ~~...~~ $\exists$ valamely val. változó eloszlása. Azaz: ~~található~~ definiálható egy kísérlet és egy X valváltozó úgy, hogy f az X eloszlása

Így (pl.): $\Omega = [0,1]$, $P =$ Lebesgue

(azaz: ω egyenletes eloszlású pont $[0,1]$-en)

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

$$X(\omega) = \min \{ n \mid F(n) > \omega \}.$$

<u>Nevezetes eloszlások:</u>

0 "bináris" $\xi = 0, 1$

$$P(\xi = 1) = p, \quad P(\xi = 0) = q = 1 - p$$

$f(0) = q$, $f(1) = p$ $\qquad p + q = 1$

"$\xi = 1$: siker" "$\xi = 0$: kudarc"

$\Omega = \{0, 1\}$ $\quad \xi(0) = 0$, $\xi(1) = 1$, $\quad P(0) = q$, $P(1) = p$

Hypergeometrikus eloszlást (Pólya)

① Binomiális eloszlás

legyen egy kísérlet lehetséges kimenetele $\begin{cases} 1 & \text{(siker)} \\ 0 & \text{(kudarc)} \end{cases}$

$$P(\text{siker}) = p \quad , \quad P(\text{kudarc}) = q \quad (=1-p)$$

$$\Omega_1 = \{0, 1\} \qquad P_1(0) = q \, , \; P_1(1) = p.$$

végezzünk n független, azonos kísérletet (Bernoulli)

$$\Omega = \Omega_n = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_1 = \{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_j = 0, 1 \}$$

$$P(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n) = p^{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} \cdot q^{\sum_{j=1}^{n} (1-\omega_j)}$$

vsz. mezőnk: (Ω, P)

$X = X(\underline{\omega})$ = a sikerek száma az n kísérlet során

$= \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$

$$P(X = k) = P(\{ \underline{\omega} \in \Omega_n \mid \omega_1 + \cdots + \omega_n = k \})$$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\boxed{b(k; p, n) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$ Binomiális eloszl.

rögzített paraméterek: $\begin{cases} p \in (0, 1) \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\qquad q = 1 - p$

változó: $k = 0, 1, 2, \dots n$

Példák

- 6x dobunk a kockával X = a hatosok száma

$$b\left(k; \tfrac{1}{6}, 6\right) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}$$

- az év minden hetén veszek egy ötös lottót.

Siker = {legalább két találat}

$$p = P(\text{siker egy adott héten}) = \sum_{k=2}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \approx 0.02$$

X = sikereim száma az teljes év során

$$b(k; 0.02, 52) = \binom{52}{k}(0.02)^k (0.98)^{52-k}$$

eloszlású.

(2) Poisson eloszlás

legyen $p \ll 1$, $n \gg 1$, $n \cdot p \asymp 1$

végezzünk n Bernoulli kísérletet, melyeknél a siker valószínűsége (az egyes kísérleteknél) p

Akkor tekintsük a

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} b(k; p, n) \quad \text{limeszt}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ rögzített értékeknél.

$$\lim_{\dots} b(k; p, n) = \lim_{\dots} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{\dots} (n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-k+k)\, p^k (1-p)^n (1-p)^{-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{\dots} \left[\prod_{j=1}^{k} \left\{np\left(1-\frac{k-j}{n}\right)\right\}\right]\left[\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{np}\right](1-p)^{-k}$$

$$n\cdot p\left(1-\frac{k-j}{n}\right) \longrightarrow \lambda$$

$$\left[(1-p)^{\frac{1}{p}}\right]^{np} \longrightarrow e^{-\lambda}$$

$$(1-p)^{-k} \longrightarrow 1$$

<u>Tétel</u> binomiális eloszlás Poisson approximációja:

$$\lim_{\dots} b(k; p, n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{\dots} = \lim_{\substack{p\to 0 \\ n\to\infty \\ np\to\lambda}}$$

$$p(k; \lambda) := e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$ Poisson eloszl.

rögzített paraméter : $\lambda \in (0, \infty)$

változó : $k = 0, 1, 2, \dots$

Példák:

① 6x dobunk a kockával X = 6os száma

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \frac{1}{6} \\ n = 6 \\ \lambda = pn = 1 \end{array}}$$

	$b(k; \frac{1}{6}, 6)$	$p(k; 1)$	$\frac{\lvert b-p \rvert}{b}$
$k=0$	$\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.3349$	$e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 0.3679$	0.099
$k=1$	$\binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4019$	$e^{-1}\frac{1^1}{1!} = 0.3679$	0.085
$k=2$	$\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.2009$	$e^{-1}\frac{1^2}{2!} = 0.1839$	0.085 Idáig egészen jó
$k=3$	$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.0536$	$e^{-1}\frac{1^3}{3!} = 0.0613$	0.144
$k=4$	$\binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0080$	$e^{-1}\frac{1^4}{4!} = 0.0153$	0.913
$k=5$	$\binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0006$	$e^{-1}\frac{1^5}{5!} = 0.0031$	4.167
$k=6$	$\binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.00002$	$e^{-1}\frac{1^6}{6!} = 0.0005$	
$k>6$			

② Egy teljes évig vesznek hetente ötös lottót

X = min. 2 találatok száma

$$\boxed{\begin{aligned} n &= 52 \\ p &= 0.02 \\ \lambda &= np = 1.04 \end{aligned}}$$

	$b(k; 0.02, 52)$	$p(k; 1.04)$	$\frac{\lvert b-p \rvert}{b}$
$k=0$	$\binom{52}{0}(0.02)^0(0.98)^{52} = 0.3497$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^0}{0!} = 0.3535$	0.011
$k=1$	$\binom{52}{1}(0.02)^1(0.98)^{51} = 0.3712$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^1}{1!} = 0.3676$	0.010
$k=2$	$\binom{52}{2}(0.02)^2(0.98)^{50} = 0.1932$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^2}{2!} = 0.1911$	0.011
$k=3$	$\binom{52}{3}(0.02)^3(0.98)^{49} = 0.0657$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^3}{3!} = 0.0663$	0.009
$k=4$	$\binom{52}{4}(0.02)^4(0.98)^{48} = 0.0164$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^4}{4!} = 0.0172$	0.049
$k=5$	$\binom{52}{5}(0.02)^5(0.98)^{47} = 0.0032$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^5}{5!} = 0.0036$	0.125
$k=6$	$\binom{52}{6}(0.02)^6(0.98)^{46} = 0.0005$	$e^{-1.04}\frac{(1.04)^6}{6!} = 0.0006$	0.2

Még egy példa: A ketyere gyárban $P(\text{egy ketyere hibás}) = 0.015 = p$. Hány ketyerét csomagoljunk egy ládába ahhoz hogy

$P(\text{a ládában legalább 100 hibátlan ketyere van}) \geq 0.8$ legyen?

Megoldás: $n = 100 + x \ (\approx 100)$ $\quad \lambda = np = (100+x)\cdot 0.015 \approx 1.5$

$$P(k \text{ hibás ketyere}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0.8 \quad , \dots , \quad x = 2.$$

— * —

Elemezni a köz-kifejezéseket:

" ... átlagosan naponta ennyi-és ennyi ..."

" ... átlagosan négyzetméterenként ennyi ..."

etc.

még egyszer: n golyó, s urnába $\quad n, s \to \infty$, $\quad \frac{n}{s} \to \lambda \in (0, \infty)$

③ • Geometriai (vagy negatív binomiális) eloszlás.

Bernoulli kísérletsorozatot végzünk $P(\text{siker}) = p$
$P(\text{kudarc}) = q$

$X =$ az első siker sorszáma

$$P(X=k) = q^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(k; p) := q^{k-1} p & \text{geometriai eloszlás} \\ \text{paraméter: } p \in (0,1) & q = 1-p \\ \text{változó: } k = 1, 2, 3, \dots & \end{array}}$$

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ \underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_j = 0, 1 \}$$

$$P\left(\{ \underline{\omega} \in \Omega \mid \omega_{i_1} = \varepsilon_1, \omega_{i_2} = \varepsilon_2, \dots, \omega_{i_m} = \varepsilon_m \} \right) = p^{\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j} q^{\sum_{j=1}^{m} (1-\varepsilon_j)}$$

bármely $\left. \begin{array}{l} \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in \{0,1\} \end{array} \right\}$ re

$$X(\underline{\omega}) = \inf \{ j \mid \omega_j = 1 \}$$

A geometriai eloszlás örökifjúsága

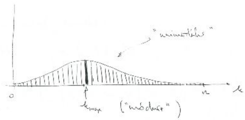
X geometriai eloszlású

$$P(X=n+k \mid X>n) = \frac{q^{n+k-1} p}{\sum_{l=1}^{\infty} q^{n+l-1} p} =$$

$$= \frac{q^{k-1}}{\frac{1}{1-q}} = q^{k-1} p = P(X=k)$$

Sóder

A binomiális eloszlás "jellege"



$k \geq 1$:

$$\frac{b(k)}{b(k-1)} = \frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}\, p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)\,p}{k \cdot q}$$

$$b(k) \geq b(k-1) \iff k \leq np + p$$

$$\boxed{np - q \leq k_{max} \leq np + p}$$

Bernoulli: Nagy számok törvénye

$p \in (0,1)$, S_n $b(\cdot\,; p, n)$ eloszlású

n független (p,q) kísérletben a sikeres szám.

$$P(S_n = k) = b(k; p, n)$$

12.

Ha $n \gg 1$ $\quad \frac{S_n}{n}$ közel van p-hez

Pontos megfogalmazás:

Tétel $\quad p \in (0,1)$ fix, $\quad \varepsilon > 0$ fix

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right) = 0$$

$\boxed{\text{konvergencia sebessége: } n^{-1}}$

[belátjuk, hogy $\leq \frac{2(pq+\varepsilon)}{n\varepsilon^2}$]

Biz. Legyen $\quad r \in \mathbb{N} \quad r \geq np + p \quad (r > k_{max})$

$$\frac{b(r+k)}{b(r+k-1)} = \frac{(n-r-k+1)p}{(r+k)q} \leq \underbrace{\frac{(n-r)p}{r \cdot q}}_{y}, \quad y < 1 \qquad k \geq 1$$

$$b(r+l) = b(r) \frac{b(r+1)}{b(r)} \cdot \frac{b(r+2)}{b(r+1)} \cdots \frac{b(r+l)}{b(r+l-1)} =$$

$$= b(r) \prod_{k=1}^{l} \frac{b(r+k)}{b(r+k-1)} \leq b(r)\, y^l$$

$$P(S_n \geq r) = \sum_{l=0}^{n-r} b(r+l) \leq \sum_{l=0}^{n-r} b(r)\, y^l \leq$$

$$\leq b(r) \sum_{l=0}^{\infty} y^l = b(r) \frac{1}{1-y} =$$

./.

$$P(S_n \geq r) \leq b(r)\,\frac{rq}{r-np}.$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} b(k) \geq \sum_{k=k_{max}}^{r} b(k) \geq (r-k_{max}+1)\,b(r) \geq$$

$$\geq (r-np)\,b(r)$$

$$\Rightarrow \quad b(r) \leq \frac{1}{r-np}$$

behelyettesítve:

$$\boxed{P(S_n \geq r) \leq \frac{rq}{(r-np)^2} \qquad \text{ha} \quad r > k_{max}}$$

$$P(S_n \geq n(p+\varepsilon)) = P(S_n \geq \lceil n(p+\varepsilon)\rceil) \leq$$

$$\frac{\lceil n(p+\varepsilon)\rceil q}{(\lceil n(p+\varepsilon)\rceil - np)^2} \leq \frac{q\{n(p+\varepsilon)+1\}}{(n\varepsilon)^2} = \frac{1}{n\cdot\varepsilon^2}\left(pq+\varepsilon q+\frac{q}{n}\right)$$

$$\leq \frac{pq+\varepsilon q+\frac{q}{n}}{n\varepsilon^2}$$

QED

Sokkal többet bizonyítottunk: ha $\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \to \infty$, akkor

$$P(|S_n - np| > \varphi(n)) \to 0 \qquad !!!$$

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás 6.

Diszkrét val. változó - bővebben

Diszkrét, valós értékű val. változó:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Ran}(X) = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$

X val. változó eloszlása:

$$f(x_i) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i)$$

$$\left[f(x_i) \geq 0, \quad \sum_i f(x_i) = 1 \right]$$

Két (vagy több) val. változó együttes eloszlása:

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Ran}\, X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Ran}\, Y = \{y_1, y_2, \dots\}$

[egyszerre vannak definiálva, ugyanazon a val. mezőn]

Pl: Ω = érmedobás

$\left.\begin{array}{l} X = \text{az első írás} \\ Y = \text{az első fej} \end{array}\right\}$ sorszáma.

<u>együttes eloszlás:</u>

$$f(x_i, y_j) := P(\{\omega \mid X(\omega)=x_i,\ Y(\omega)=y_j\}) = P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

$$f(x_i, y_j) \geq 0, \quad \sum_{i,j} f(x_i, y_j) = 1$$

<u>Előbbi példában</u> $\quad f(1,k) = f(k,1) = \frac{1}{2^k} \quad k \geq 2$

$j \backslash i$	1	2	3	4	...
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...
2	$\frac{1}{4}$	0	0	0	...
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	...
4	$\frac{1}{16}$	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$f(x,y)$ lényegesen több információt tartalmaz, mint X és Y eloszlása együttesen

$$P(X=x_i) = \sum_j P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

$$P(Y=y_j) = \sum_i P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

azaz $\quad f_1(x_i) := \sum_j f(x_i, y_j); \quad f_2(y_j) = \sum_i f(x_i, y_j)$

f_1, f_2 az f együttes eloszlás $\boxed{\text{marginálisai}}$

Előbbi példában:

$$f_1(i) = 2^{-i}, \quad f_2(j) = 2^{-j}$$

Feltételes eloszlás

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

$$f_{1|2}(x_i \mid y_j) := \frac{f(x_i, y_j)}{f_2(y_j)}$$

$$f_{2|1}(y_j \mid x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_1(x_i)}$$

Előbbi példában

$$f_{1|2}(i \mid j) = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 2^{-(i-1)}, & i > 1 \end{cases} \quad (j = 1) \qquad \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases} \quad (j > 1)$$

További példák:

2. 3 golyó 3 dobozban.

N = nem-üres dobozok száma
X_1 = első dobozban lévő golyók száma

(N, X_1)

$X_1 = j$ \ $N = i$	1	2	3	$f_2(j)$
0	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{8}{27} = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$
1	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27} = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27} = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	$\frac{1}{27} = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0$
$f_1(i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	

Számoljuk ki a feltételes eloszlást

$f_{1|2}(i \mid 0) = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0$ $\qquad i = 1, 2, 3$

$f_{1|2}(i \mid 1) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$f_{1|2}(i \mid 2) = 0, 1, 0$

$f_{1|2}(i \mid 3) = 1, 0, 0$

$f_{2|1}(j \mid 1) = \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}$ $\qquad j = 0, 1, 2, 3$

$f_{2|1}(j \mid 2) = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0$

$f_{2|1}(j \mid 3) = 0, 1, 0, 0$

3. multinomiális eloszlás:

egy kísérlet kimenetei $1, 2, \ldots, r$ — $p_1, p_2, \ldots, p_r$ valószínűségekkel

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

n független azonos kísérlet

X_j = azon kísérletek száma, amikor az eredmény "j", $j = 1, 2, \ldots, r$

$$\left(\sum_{j=1}^{r} X_j = n \right)$$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

0 egyébként

Marginálisok: $P(X_i = k) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p_i^{k} (1-p_i)^{n-k}$

Hf: multinomiális eloszlás multi-Poisson approximációja | Polyhypergeometrikus eloszlást pótolni !!!

Val. változók függvényei is val. változók

$$\left.\begin{array}{l} X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad Y := \varphi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

vagy

$$\left.\begin{array}{l} X, Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad Z := \varphi(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$$

etc.

Val. változók függetlensége:

$X, Y, \dots, Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ val. változók függetlenek ha bármely $(a, a'), (b, b'), \dots, (c, c') \subseteq \mathbb{R}$ intervallumokra az

$$A = \{\omega \mid X(\omega) \in (a, a')\}$$
$$B = \{\omega \mid Y(\omega) \in (b, b')\}$$
$$\vdots$$
$$C = \{\omega \mid Z(\omega) \in (c, c')\}$$

események függetlenek

Tétel

(1) az $X, Y, \ldots, Z$ val. változók akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$f(x_i, y_j, \ldots, z_k) = f_X(x_i)\, f_Y(y_j) \cdots f_Z(z_k)$$

ahol $f_X(\cdot), f_Y(\cdot), \ldots, f_Z(\cdot)$ az f együttes eloszlás marginálisai

(2) ha $X, Y, \ldots, Z$ független val. változók és $\varphi, \psi, \ldots, \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor $\varphi(X), \psi(Y), \ldots, \chi(Z)$ szintén függetlenek (együttesen is)

Biz. trivi.

Független $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{Z}$ értékű val. változók összegének eloszlása: a eloszlások konvolúciója

X, Y független $\mathbb{N}$ értékű val. változók

$f(i) = P(X = i)$; $g(j) = P(Y = j)$

$Z = X + Y$, $h(k) = P(Z = k)$

$$h(k) = P(X+Y=k)$$

("teljes vsz") $= \sum_{j \geq 0} P(X=j,\ Y=k-j)$

(függetlenség) $= \sum_{j=0}^{k} P(X=j)\, P(Y=k-j)$

$$\boxed{\begin{aligned} h(k) &= \sum_{j=0}^{k} f(j)\, g(k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f(k-j)\, g(j) \\ h &= f * g \end{aligned}}$$

Hf számoljuk ki: $b(\cdot; p, n) * b(\cdot; p, m)$ -et

$p(\cdot; \lambda) * p(\cdot; \mu)$ -t

Ha X, Y, $\mathbb{Z}$ -értékűek __függetlenek__ $\quad Z = X + Y$

$$\boxed{\begin{aligned} h(k) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)\, g(k-j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k-j)\, g(j) \\ h &= f * g \end{aligned}}$$

Valószínűségi eloszlások főbb jellemzői

várhatóérték, szórásnégyzet, kovariancia

Legyen X val. változó

$$P(X = x_i) = f(x_i) = p_i \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlásúak

$$n_i = \#\{ k \le n \mid X_k = x_i \}$$

Érdekel

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} =$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{n_i}{n}$$ viselkedése $n \to \infty$ esetén

legyen $\varepsilon > 0$ fix

Bernoulli NSZT:

$$P\left(\left| \frac{n_i}{n} - p_i \right| > \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{r} |x_j|} \right) \to 0$$

Köv:

$$P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \sum_{i=1}^{r} x_i p_i \right| > \varepsilon \right) =$$

%

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{r} x_i \left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{r} |x_i| \left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{r} \left\{\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| > \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{r}|x_j|}\right\}\right) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{r} P\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| > \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{r}|x_j|}\right) \longrightarrow 0$$

amint $n \to \infty$

<u>Azaz</u>: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ "tipikusan" (i.e. 1-hez tartó vszg-el) közel van $\left(\sum_{i=1}^{r} x_i p_i\right)$-hez

<u>Def</u>

$$\mathbb{E}X = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i)$$

Az X val. változó <u>várható értéke</u>

ha $\sum_i |x_i| f(x_i) < \infty$.

(Ha $\sum |x_i| f(x_i) = \infty$, akkor EX nincs értelmezve)

Hf Számolják ki a nevezetes eloszlások várható értékét (geom, binom, Poisson)

→ $\varphi(X)$, $\varphi(X,Y)$ várható értékének számolása
→ magasabb momentumok EX^k, $E|X|^k$

A várható érték linearitása (Feltételes várható érték)

Tétel Legyenek $X, Y, \dots, Z$ val. változók

$Ran\,X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $Ran\,Y = \{y_1, y_2, \dots\}$
$Ran\,Z = \{z_1, z_2, \dots\}$.

Továbbá $a, b, \dots, c \in \mathbb{R}$ konstansok

$$S = aX + bY + \dots + cZ.$$

Ha $E|X| < \infty$, $E|Y| < \infty, \dots, E|Z| < \infty$, akkor
$$E|S| < \infty$$
és
$$ES = aEX + bEY + \dots + cEZ.$$

Pl. A kalapcserés feladatban legyen N = azon személyek száma, akik a saját kalapjukat viszik haza. $EN = ?$

$EN = \sum_{k=0}^{n} k\, P(N = k)$ lehet kiszámolni

De: $N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{"i" saját kalapját viszi} \\ 0 & \text{"i" nem a saját kalapját viszi} \end{cases}$$

$$EN = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = n E\xi_1 = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Tétel bizonyítása

$$ES = \sum_{i,j,\dots,k} (ax_i + by_j + \dots + cz_k) f(x_i, y_j, \dots, z_k)$$

$$= \sum_{ij\dots k} ax_i \, f(x_i, y_j, \dots, z_k) +$$

$$\sum_{ij\dots k} by_j \, f(x_i, y_j, \dots, z_k) +$$

$$\dots$$

$$\sum_{ij\dots k} cz_k \, f(x_i, y_j, \dots, z_k) =$$

$$= a \sum_i x_i \sum_{\cancel{i}j\dots k} f(x_i, y_j, \dots, z_k) +$$

$$b \sum_j y_j \sum_{i\cancel{j}\dots k} f(x_i, y_j, \dots, z_k) +$$

$$\dots$$

$$c \sum_k z_k \sum_{ij\dots \cancel{k}} f(x_i, y_j, \dots, z_k) =$$

$$= a \sum_i x_i \, f_X(x_i) +$$

$$b \sum_j y_j \, f_Y(y_j) +$$

$$\dots$$

$$c \sum_k z_k f_Z(z_k) =$$

$$= a EX + b EY + \dots + c EZ.$$

Tétel (Schwarz egyenlőtlenség)

X, Y vál. változó, $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$.

$$E|X \cdot Y| \le \sqrt{E(X^2)\, E(Y^2)}$$

Biz $Z_\lambda = (|X| - \lambda |Y|)^2 \le 2|X|^2 + 2\lambda^2 |Y|^2$

$\Rightarrow E|Z_\lambda| < \infty$.

Tehát: $g(\lambda) := E Z_\lambda$ jól definiált fgv.

$g(\lambda) = EX^2 - 2\lambda\, E|X||Y| + \lambda^2 EY^2$

$g(\lambda) \ge 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ diszkrimináns ≤ 0

i.e. $(E|X||Y|)^2 \le (EX^2)(EY^2)$

q.e.d.

Steiner tétel: $E(X-c)^2 = E(X-EX)^2 + (c-EX)^2$

Biz. $E(X-c)^2 = E[(X-EX)-(c-EX)]^2 =$

$E(X-EX)^2 - 2E\{(X-EX)(c-EX)\} +$

$+ E(c-EX)^2 = \dots$ q.e.d.

Köv $E(X-c)^2$ minimális $c = EX$ választással.

Független val. változók szorzatának várhatóértéke faktorizálódik:

Tétel $X, Y, \dots, Z$ függetlenek, $E|X|<\infty, \dots, E|Z|<\infty$

Ekkor $E|X \cdot Y \cdots Z| < \infty$ és

$$E(X \cdot Y \cdots Z) = EX \cdot EY \cdots EZ.$$

Biz.
$$E(XY\cdots Z) = \sum_{ij\dots k} x_i y_j \cdots z_k f(x_i, y_j, \dots, z_k)$$

$$= \sum_{ij\dots k} x_i y_j \cdots z_k \, f_X(x_i) f_Y(y_j) \cdots f_Z(z_k)$$

$$= \Big(\sum_i x_i f(x_i)\Big)\Big(\sum_j y_j f_Y(y_j)\Big)\cdots\Big(\sum_k z_k f_Z(z_k)\Big)$$

$$= (EX)(EY)\cdots(EZ). \qquad \text{q.e.d.}$$

A szórásnégyzet (variancia):

$$D^2(X) := E(X-EX)^2 = EX^2-(EX)^2$$

X eloszlásának a "szétkentségét" (= szórását) méri

$$D^2X = 0 \Leftrightarrow P(X=a)=1$$ (csak egy értéket vehet fel)

Hf. számoljuk ki a nevezetes eloszlások szórásnégyzetét

Tétel: $\boxed{\text{független!}}$ val. változók összegének szórásnégyzete = a szórásnégyzetek összege

$X, Y, \dots, Z$ függetlenek, $EX^2<\infty, \dots, EZ^2<\infty$

Ekkor $D^2(X+Y+\dots+Z) = D^2(X)+D^2(Y)+\dots+D^2(Z)$

Biz. $D^2(X+Y+\dots+Z) = E\left(X+Y+\dots+Z - E(X+Y+\dots+Z)\right)^2$

$= E\left((X-EX)+(Y-EY)+\dots+(Z-EZ)\right)^2$

$= E(X-EX)^2 + E(Y-EY)^2 + \dots + E(Z-EZ)^2$

$+ 2E(X-EX)(Y-EY) + 2E(X-EX)(Z-EZ)$

$+ 2E(Y-EY)(Z-EZ) = \dots =$

$= D^2(X) + D^2(Y) + \dots + D^2(Z)$ q.e.d.

Kovariancia és korreláció:

X, Y val. változók $E(X^2)<\infty$, $E(Y^2)<\infty$

$$Cov(X,Y) = E\,(X-EX)(Y-EY)$$

$$|Cov(X,Y)| \leq D(X)\,D(Y)$$

Schwarz egyenlőtlenség miatt

$Cov(X,Y)$ az X és Y kölcsönös függését méri valamilyen értelemben

$X_1, X_2, \dots, X_n$ val. változók

kovariancia mátrix

$$C_{ij} = Cov(X_i, X_j) \qquad i,j=1,\dots,n$$

$$C_{ij} = C_{ji} \quad ✓$$

C pozitív definit:

$\forall\ z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{z}_i\, C_{ij}\, z_j = \sum_{ij=1}^{n} \bar{z}_i\, Cov(X_i X_j) z_j =$$

$$= E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} z_i (X_i - EX_i)\right|^2\right\} \geq 0.$$

Másrészt: ha $C_{ij} = C_{ji} \in \mathbb{R}$ pozitív definit mátrix, akkor $\exists\ X_1, \dots, X_n$ val. változók, úgy, hogy $C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$.

Weierstrass Approximációs tétel:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n < \infty$, $\exists\, B_n$ n-ed fokú polinom, úgy hogy

$$\sup_{0 \le x \le 1} \left| f(x) - B_n(x) \right| < \varepsilon$$

Bernstein féle bizonyítás:

$$B_n(p) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \mathbb{E} f\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

ahol S_n $b(\cdot\,; p, n)$ eloszlású

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$|f(p) - B_n(p)| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \le$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left| f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

$$\sup_{0\le x\le 1} |f(x)| =: M$$

f egyenletesen folytonos: $\exists\, \eta > 0 : \ |x-y| < \eta$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(p) - B_n(p)| \le$$

$$\sum_{k:\,|p-\frac{k}{n}|<\eta} \cdots + \sum_{k:\,|p-\frac{k}{n}|>\eta} \cdots \le$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + 2M \underbrace{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta \right)}_{\le \frac{\text{const } M}{n\eta^2}}$$

$$2M \ \frac{M\gamma\varepsilon}{n\delta^2} < \varepsilon$$

$n >$

 1.

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás 8.

Val. változók, eloszlásfüggvények stb. általában

(1-egydimenziós eloszlások)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető fgv.

valós értékű valószínűségi változó

eloszlásfüggvény: $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$
$$= P(X < x) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

eloszlásfgv. alaptulajdonságai:

(1) monoton ↑ : $x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) balról folytonos: $\lim_{x' \to x^+} F(x') = F(x)$

Biz: (1) evidens; (2,3): monoton osztály tétel

diszkrét eloszlások – régi ismerősök

$$\mathrm{Ran}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$F(x) = \sum_{i:\, x_i \le x} P(X = x_i)$$

⇒ $F(x)$ tisztán ugró (lépcsős)

<u>abszolút folytonos eloszlások</u>

F absz. folyt. ha $\exists\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

úgy hogy $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$

ekkor f az F eloszlásfv <u>sűrűségfüggvénye</u>

<u>Példák abszt. folyt eloszlásokra</u> (nevezetes absz. folyt. eloszlások)

① <u>Egyenletes</u> az $[a, b]$ intervallumban

$$-\infty < a < b < +\infty$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & b < x \end{cases} \qquad \text{eloszlás fv}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & b < x \end{cases} \qquad \text{sűrűségfv}$$

$\boxed{\text{rövidítve : } E(a, b) \text{ vagy } U(a, b)}$

② <u>exponenciális</u> $\lambda > 0$ rögzített paraméter

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{elosz.}$$

$\boxed{\text{rövidítve : } EXP(\lambda)}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{sűrűségfv}$$

Az exponenciális eloszlás örökifjúsága:

$$P(T > x+y \mid T > x) = \frac{P(T > x+y)}{P(T > x)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P(T > y)$$

[hasonló tulajdonsága volt – diszkrétben – a geometriai eloszlásnak]

③ Normális – vagy Gauss – eloszlás

$m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ rögzített paraméterek

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

jelölése: $N(m, \sigma)$

$$F_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{m,\sigma}(y)\, dy$$

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{0,1}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$F_{m,\sigma}(x) = F_{0,1}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Ha X standard normális eloszlású $N(0,1)$
$m=0,\ \sigma=1$

akkor $Y = \sigma X + m$ $\quad F_{m,\sigma}$ eloszlású $N(m,\sigma)$

Fordítva: Ha X $N(m,\sigma)$-eloszlású,
akkor $Y := \dfrac{X-m}{\sigma}$ standard normális, $N(0,1)$ eloszlású.

<u>Folytonos de szinguláris eloszlások</u>

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$ $\quad \boxed{\text{folytonos}}$

nincs ugrása $\equiv$ nincs pontba koncentrált tömeg

De a Lebesgue mértékre szinguláris. Azaz Lebesgue majdnem mindenütt $F' = 0$.

Példa: Cantor függvény

Lebesgue felbontási tétel [valószínűségi eloszlásfüggvényekre megfogalmazva]: Ha $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ vszt. eloszlásfüggvény [a fenti (1), (2), (3) tulajdonságokkal rendelkezik], akkor F egyértelműen felbontható

$$F = F_{\text{diszkrét}} + F_{\text{absz.folyt}} + F_{\text{folyt.sing.}}$$

alakra, ahol $F_{\text{diszkrét}}:\mathbb{R}\to[0,1]$ diszkrét-, $F_{\text{absz.folyt}}:\mathbb{R}\to[0,1]$ abszolút folytonos, $F_{\text{folyt.sing}}:\mathbb{R}\to[0,1]$ folytonos de singuláris eloszlás fggv.

Megjegyzések: ① Bizonyítás megtalálható bármely nívósabb analízis könyvben.

② A tétel sokkal általánosabban igaz: Korlátos változású $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényekre

③ Ekvivalens mértékelméleti megfogalmazás....

Eloszlásfüggvények és Borel mértékek $\mathbb{R}$-en

1-1-értelműen megfeleltethetőek egymásnak a

- $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$-n értelmezett μ vst. mértékek
- $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ vst eloszlásfüggvények

Így: ha μ adott, legyen

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

ha F adott, legyen

$$\mu((-\infty, x]) := F(x)$$

Köv: $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ -re

$$\mu((a,b)) = F(b^-) - F(a^+)$$

$$\mu((a,b]) = F(b^+) - F(a^+)$$

$$\mu([a,b)) = F(b^-) - F(a^-)$$

$$\mu([a,b]) = F(b^+) - F(a^-)$$

kiterjeszthető $\forall$ Borel halmazra pontosan úgy, mint a Lebesgue mérték: $B \in \mathcal{B}$-re.

$$\mu(B) = \inf\left\{ \sum_j \mu((a_j, b_j)) \;\middle|\; \bigcup_j (a_j, b_j) \supseteq B \right\}$$

$\boxed{* \rightarrow}$

(*) minden F eloszlásfüggvény valamely valószínűségi változó eloszlásfüggvénye !!

$$\Omega = [0,1] \; ; \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}, \quad dP(x) = dx$$

$$X(\omega) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq \omega\} = F^{-1}(\omega)$$

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \{\omega \mid \sup\{y \mid F(y) \leq \omega\} < x\}$$

$$= \{\omega \mid F(y) \leq \omega \Rightarrow y < x\}$$

$$= [0, F(x-))$$

$$P(X(\omega) < x) = |[0, F(x)]| = F(x).$$

Az előállítás (persze) nem egyértelmű !

<u>Riemann - Stieltjes integrál:</u>

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eloszlásfv

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ folytonos, korlátos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{j}{n}\right)\left[F\left(\frac{j+1}{n}\right) - F\left(\frac{j}{n}\right)\right]$$

létezik a limesz !!!

[Bizonyítás: pontosan úgy, mint a Riemann integrál értelmezésekor]

- ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ folyt. de <u>nem</u> korlátos

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ha } \varphi(x) \le M \\ M & \text{ha } \varphi(x) > M \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_M(x)\, dF(x)$ létezik az előbbiek alapján.

[megj: φ_M [illegible] folyt]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) := \lim_{M \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_M(x)\, dF(x)$$

monoton növekvő M-el, ezért a limesz létezik (lehet esetleg $+\infty$ is !)

- ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos [van feltétlenül pozitív]

φ integrálható dF szerint <u>ha</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| \, dF(x) < \infty$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dF(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_+(x) \, dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_-(x) \, dF(x) =$$

ahol $\boxed{\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ha } \varphi(x) \geq 0 \\ 0 & \text{ha } \varphi(x) < 0 \end{cases} \qquad \varphi_-(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ha } \varphi(x) \leq 0 \\ 0 & \text{ha } \varphi(x) > 0 \end{cases}}$

mindkettő véges

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{j}{n}\right) \left[F\left(\frac{j+1}{n}\right) - F\left(\frac{j}{n}\right) \right]$$

a limesz létezik

A Riemann - Stieltjes integrál alaptulajdonságai azonosak a Riemann integráléival

- $\int (a\varphi + b\psi) \, dF = a \int \varphi \, dF + b \int \psi \, dF$
- $\int |\varphi| \, dF \leq \sup |\varphi| \int dF$

stb.

Ha F $\boxed{\text{diszkrét}}$, szakadási pontjai $(x_i)_i$ és

$$F(x_i^+) - F(x_i^-) = p_i$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos (legalábbis az x_i pontokban

akkor $$\int \varphi \, dF = \sum_i \varphi(x_i)\, p_i$$

Ha F $\boxed{\text{abszolút folytonos}}$, sűrűségfüggvénye f

$$\left(F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \right)$$

akkor persze $$\int \varphi \, dF = \int \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

Valószínűségi változók függvényei (transzformáltjai)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ val. változó eloszlásfüggvénye $F(x)$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető (általában ennél sokkal regulárisabb lesz, pl. diff.-ható)

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y := \psi \circ X = \psi(X)$

szintén val. változó eloszlásfüggvénye $G(y)$

Kérdés: Hogyan fejezzük ki G-t, F és ψ ismeretében?

$$\begin{aligned} G(y) := P(Y \le y) &= P(\psi(X) \le x) \\ &= P(X \in \psi^{-1}((-\infty, x])) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\psi^{-1}((-\infty,x])}(y)\, dF(y) \\ &= \int_{\psi^{-1}((-\infty,x])} dF(y) \end{aligned}$$

jelölés: $\mathbb{1}_A(y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \in A \\ 0 & \text{ha } y \notin A \end{cases}$

Ha $\boxed{F \text{ diszkrét}}$, akkor $\boxed{G \text{ is diszkrét}}$

és $$P(Y=y) = \sum_{x \in \psi^{-1}(y)} P(X=x)$$

Ha F absz. folyt., $F'=f$ és $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folyt. diffható és nincsenek vízszintes platói (ahol $\psi' = 0$, ~~maximum~~ legfeljebb megszámlálható sok pontban)

akkor G is abszolút folytonos, $G' = g$ és

$$\boxed{g(y) = \sum_{x \in \psi^{-1}(\{y\})} \frac{f(x)}{|\psi'(x)|}}$$

<u>Bit</u> változócsere az integrál alatt / összetett függvények differenciálása

legyen $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffható, szigorúan monoton növekvő. Ekkor $\forall y$ $\# \psi^{-1}(\{y\}) \leq 1$.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(\psi(X) \leq y) = P(X \leq \psi^{-1}(y))$$
$$= F(\psi^{-1}(y))$$
$$\frac{d}{dy} F(\psi^{-1}(y)) = F'(\psi^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} \psi^{-1}(y)$$
$$= f(\psi^{-1}(y)) / \psi'(\psi^{-1}(y)).$$

QED.

Az általános esetben: ψ szigorúan monoton véges (vagy megszámlálhatóan sok) szakaszon.

<u>Példa</u>: log-normális eloszlás.

X $N(m, \sigma)$ eloszlású [m várhatóértékű, σ szórású normális]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right\}$$

$Y = e^X$

Számoljuk ki Y eloszlásának sűrűségfüggvényét!

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\, y} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\lg\frac{y}{M}\right)^2\right\} & \text{ha } y > 0 \end{cases}$$

a log-normális eloszlás bizonyos alkalmazásokban gyakran előfordul (példát ld később).

<u>Valószínűségi eloszlások jellemző adatai:</u>

várható érték, szórás, medián stb.

A valószínűségi eloszlás $\boxed{\text{bizonyos bonyolult}}$ objektum — teljes jellemzésére ∞ sok adat szükséges. Néhány egyszerű számszerű adattal próbáljuk meg ~~a~~ $\boxed{\text{részlegesen jellemezni}}$

Két legfontosabb ismérv:

⊛ az eloszlás $\boxed{\text{centruma}}$

⊛ az eloszlás $\boxed{\text{szétkentsége}}$, diffúzsága stb.

Mindkettő többféleképpen is jellemezhető számszerűen.

De: a legtermészetesebbek

a várható érték (a centrum).

$$EX = m := \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

ahol X val. változó eloszlása F.

[Csak akkor van értelmezve, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty$]

ld. köv. oldal

Példák:

① egyenletes $E(a, b)$

$$m = \int_a^b x \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{a+b}{2}$$

② exponenciális $EXP(\lambda)$

$$m = \int_0^{\infty} x \, e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot dx = \frac{1}{\lambda}$$

③ normális (Gauss) $N(m, \sigma)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \, dx = m$$

[valóban: nem véletlenül jelöltük így]

④ Példa egy olyan eloszlásra, amelyeknél nem értelmezhető a várható érték

(standard) Cauchy eloszlás $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

(*)
vissza az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre:

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető,

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$EX := \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$ Lebesgue integrál

valóban: ez ugyanaz, mert

$$F(x) := P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right) \;!$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \sum_k k \cdot h \; P\left(\{\omega \mid X(\omega) \in [kh, (k+1)h)\}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \ \frac{1}{\pi} \ \frac{1}{1+x^2} \ dx = \infty$$

tehát $\int_{-\infty}^{\infty} x \ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \ dx$ nem értelmezhető!

A várható érték a centrum egyik lehetséges mérőszáma. Más lehetőség is van (pl. medián, ld. lejjebb) De a várható érték a legtermészetesebb

Mert: ① Könnyű vele számolni

② a NSZT-ben, CHT-ben is jön elő természetes módon (és nem a medián, vagy ~~egyebek~~)

függvény várható értéke

ld. köv. oldal $\circledast \longrightarrow \%$

A szórásnégyzet: (szétszórtság / diffúziság)

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \ dF(x) \qquad Var\,X := \mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}X)^2$$

Akkor értelmezhető ha $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) < \infty$

(ekkor automatikusan $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x)$ szintén $< \infty$

[Schwarz] és ergo $\underline{m}$ értelmezhető]

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) = \infty$ akkor $\sigma^2 = \infty$.

Könnyen látható, hogy

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)\right)^2$$

(*) A feltételes várható érték (egyszerű eset)

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad X: \Omega \to \mathbb{R} \qquad X \in L^1$

$A \in \mathcal{A}: \ P(A) > 0.$

$$E(X \mid A) := \int_A X(\omega)\, dP(\omega) \Big/ \int_A dP(\omega)$$

$$= \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_A) / \mathbb{P}(A)$$

[illegible] mert

$$E(X \mid A) = \lim_{h \downarrow 0} \sum_k k \cdot h \cdot P(kh \le X < (k+1)h \mid A)$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} k \cdot h \frac{P(\{\omega \mid kh \le X(\omega) < (k+1)h\} \cap \{\omega \in A\})}{P(\{\omega \in A\})}$$

Teljes vsz. tétele várhatóértékre:

$A_1, A_2, \ldots$ partíciója Ω-nak

$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_i A_i = \Omega$

$\forall \ P(A_i) > 0$

$$\boxed{EX = \sum_k E(X \mid A_k) \cdot P(A_k)}$$

Példák:

① Egyenletes $E(a,b)$

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx - m^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

② exponenciális $EXP(\lambda)$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} \lambda\,dx - m^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

③ normális $N(m,\sigma)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2$$

(nem véletlenül jelöltük így!)

A szórás(négyzet) a szétszórtság egyik lehetséges mértékszáma. Más lehetőség is lenne.

De ez a legtermészetesebb.
Mert ① ezzel a legkönnyebb számolni
② természetesen bukkan elő pl. a CHT-ben.

Steiner tétel

$$\mathbb{R} \ni c \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \, dF(x) \in \mathbb{R}_+$$

minimális ha $c = m$.

kész

Biz. trivi: $\int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \, dF(x)$ kvadratikus függvénye c-nek.

Val. változó függvényeinek várható értéke

X eloszlása $F(x) = P(X \leq x)$

$Y = \varphi(X)$ eloszlása $G(y) = P(Y \leq y) = \int_{\varphi^{-1}((-\infty, y])} dF(x)$.

ahol $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és $\forall$ kompakt intervallumon korlátos változású

$$EY := \int_{-\infty}^{\infty} y \, dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dF(x)$$

várhatóérték definíciója

$y = \varphi(x)$ változócserével

Bizonyítás monoton φ-re

Például ① magasabb momentumok

k-dik abszolút momentum

$$A_k := E|X|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF(x) \leq \infty$$

k-dik momentum, ha $A_k < \infty$, akkor értelmezhető

$$M_k := E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x)$$

pl. a standard normális eloszlás momentumai

$$A_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$A_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, 2^n n!$$

(ellenőrizzük !!!)

$$M_{2n} = A_{2n}, \qquad M_{2n+1} = 0.$$

Hf: Számoljuk ki az $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlás momentumait

② Exponenciális momentum, momentum generáló függvény $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(t) := E(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \, dF(x)$$

Ha az integrál konvergens (véges). Akkor értelmes, ha értelmezett legalább egy $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumban.

Haszna: $\left.\frac{d^k H}{dt^k}\right|_{t=0} = M_k$ (ellenőrizzük!)

Hf | Számoljuk ki a binomiális, Poisson, geometriai, exponenciális, Gauss eloszlások momentum generáló függvényeit.

③ Karakterisztikus függvény $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(t) := E\left(\exp(itX)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

előnye $H(t)$-vel szemben: az integrál mindig konvergens

$\varphi(t)$ minden információt tartalmaz F-ről.

Ál. $M_k = (-i)^k \left.\dfrac{d^k\varphi}{dt^k}\right|_{t=0}$ (ha létezik M_k)

Még nagyon sok szó lesz róla!!!

Hf | Számoljuk ki a binomiális, Poisson, geometriai, exponenciális, Gauss, Cauchy eloszlások karakterisztikus függvényeit.

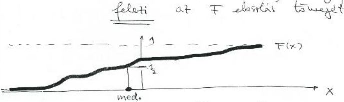
Eloszlások alternatív (más lehetséges) jellemzői

A medián — a centrum alternatív jellemzője

$\text{med.} = F^{-}(\frac{1}{2})$, akkor értelmezhető, ha

F-nek nincsen platója az $\frac{1}{2}$ szinten

med. = az a változó érték, amely pontosan felezi az F eloszlás tömegét



Hátránya a várható-értékkel szemben: nem jól számolható, nem olyan természetes

Előnye a várhatóértékkel szemben: mindig értelmezhető. Akkor is, ha nincs várható-érték

(pl. a standard Cauchy eloszlás mediánja = 0)

A diffúzság / szétszórtság egy alternatív mérőszáma

$$\int_{-\infty}^{\infty} | x - \text{med.} | \, dF(x)$$

Steiner-szerű tétel { Legyen F abs. folyt. és szigorúan növekvő (azaz $F' = f > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - c| \, dF(x) \quad \text{akkor minimális,}$$

ha $c = \text{med.}$

Biz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-c| \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| f(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{c} (c-x) f(x) \, dx + \int_{c}^{\infty} (x-c) f(x) \, dx$$

deriváljuk c szerint

$$\frac{d}{dc} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| \, dF(x) \right\} = \dots =$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x) \, dx - \int_{c}^{\infty} f(x) \, dx = 0$$

ha $c = \text{med.}$ q.e.d.

Kvantilisek $r \in [0, 1]$.

$$Q(r) = F^{-1}(r) \; —$$

Jelentése: $(-\infty, Q(r))$-be esik a teljes tömeg r-ed része. Pl. $\text{med.} = Q(\frac{1}{2})$.

Tóth Bálint : Valószínűségszámítás 9.

Val. változók eloszlásfüggvényei általában

2. többdimenziós eloszlások

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vsz. mező

$X, Y, \dots, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ val. változók, együttesen értelmezve

vagy

$(X, Y, \dots, Z) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektor értékű val. változó.

Együttes eloszlásfüggvény:

$F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$

$F(x, y, \dots, z) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x, Y(\omega) < y, \dots, Z(\omega) < z\})$

alaptulajdonságok:

(1-E) $F(\dots)$ minden változójának monoton nem-csökkenő függvénye

(2) $\lim_{x' \to -\infty} F(x', y, \dots, z) = \lim_{y' \to -\infty} F(x, y', \dots, z) = \dots =$

$= \lim_{z' \to -\infty} F(x, y, \dots, z') = 0$

minden $(x, y, \dots, z) \in \mathbb{R}^n$ -re és $\underbrace{\lim_{x,y,z \to +\infty}}_{\text{együttes limesz}} F(x,y,\dots,z) = 1$

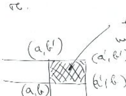
(3) F minden változójában balról folytonos
(Rényinél balról folyt. konvenció!)

$$\lim_{x' \to x^-} F(x', y, \dots, z) = \lim_{y' \to y^-} F(x, y', \dots, z) =$$

$$\lim_{z' \to z^-} F(x, y, \dots, z') = F(x, y, \dots, z)$$

$\forall (x, y, \dots, z) \in \mathbb{R}^n$-re.

<u>$(1-\varepsilon)$ nem elég</u>



(4) legyen $x \le x'$, $y \le y'$, …, $z \le z'$

és $\alpha, \beta, \dots, \gamma = 0,1$

Ekkor
$$\sum_{\substack{\alpha=0,1,\\ \beta=0,1,\\ \gamma=0,1}} (-1)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma} F(\alpha x+(1-\alpha)x', \beta y+(1-\beta)y', \dots, \gamma z+(1-\gamma)z') \ge 0.$$

szitaformula alapján a bal oldal

$= P(x \leq X < x', y \leq Y < y', \dots, z \leq Z < z')$

Hf: ellenőrizni!

Megj (1-ε) = egyszerű monotonság következik

Pl. $\boxed{x' \geq x}$

$F(x', y', \dots z') - F(x, y', \dots, z') \geq 0$ következik a

(1) baloldalán $y, \dots, z \longrightarrow -\infty$.

Egy $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely az

(1)(2)(3) tulajdonságokkal rendelkezik n-dimenziós

eloszlásfüggvénynek nevezünk

1-1 értelmű megfeleltetés eloszlásfüggvények és

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$-n definiált Borel mértékek között

- μ Borel mérték

$F(x, y, \dots, z) := \mu\left((-\infty, x) \times (-\infty, y) \times \dots \times (-\infty, z)\right)$

F eloszlásfüggvény adott: $x \le x'$, $y < y'$, ..., $z < z'$

$\mu\left((x,x') \times (y,y') \times \dots \times (z,z')\right) :=$

(1) tulajdonság -bal oldala által

kiterjentés $\mathcal{B}$-re pontosan úgy, mint a Lebesgue mérték esetében

Állítás: $F: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eloszlásfüggvény

$\exists\, (\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és

$(X, Y, \dots, Z): \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorváltozó, úgy hogy

$(X, Y, \dots, Z)$ eloszlásfüggvénye pontosan F.

Marginális- (vagy perem-) eloszlások

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\quad (X, Y, \dots, Z): \Omega \to \mathbb{R}^n$

együttes eloszlás: $F(x, y, \dots, z)$

Peremeloszlásai: $F_1(x) = P(X < x)$

egy-dimenziós

$F_2(y) = P(Y < y)$

....

$F_n(z) = P(Z < z)$

Állítás $\forall x, y, \dots, z$

$$F_1(x) = \lim_{\substack{y', \dots, z' \\ \to \infty}} F(x, y', \dots, z')$$

$$F_2(y) = \lim_{\substack{x', \dots, z' \\ \to \infty}} F(x', y, \dots, z')$$

$$F_n(z) = \lim_{x', y' \to \infty} F(x', y', \dots, z)$$

Bizonyítás

monoton osztály tétel

triv.

Abszolút folytonosság:

$F: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eloszlásfüggvény abszolút folytonos, ha $\exists$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mérhető fgv, úgy hogy

$$\forall x, y, \dots, z: \quad F(x, y, \dots, z) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \dots \int_{-\infty}^{z} f(x', y', \dots, z')\, dx'\, dy' \dots dz'$$

Ekkor $$f(x, y, \dots, z) = \frac{\partial^n F}{\partial x\, \partial y \dots \partial z}(x, y, \dots, z)$$

(Lebesgue) majdnem minden $(x, y, \dots, z) \in \mathbb{R}^n$-re

- f a sűrűség fgv

tulajdonságai $f \geq 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \dots, z)\, dx\, dy \dots dz = 1$

Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető fgv-t sűrűségfüggvénynek nevezzük.

B Diszkrét példa 2

Polinomiális

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$$

$$f(k_1, k_2, \dots, k_{r-1}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

B Polihipergeometrikus

$$N_1 + N_2 + \dots + N_r = N$$
$$1 \le n \le N$$

$$f(k_1, k_2, \dots, k_{r-1}) = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}$$

Ha F abszolút folytonos és a sűrűségfüggvénye f, akkor a marginálisok is absz. folytonosak és sűrűségfüggvényeik:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \dots, z)\, dy \dots dz$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \dots, z)\, dx \dots dz$$ $\{y$ szerint nem integrálunk

...

$$f_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots f(x, y, \dots, z)\, dx\, dy \dots$$

Biz: triv.

Példák többdimenziós abszolút folytonos eloszlásokra

($n = 2$, az egyszerű jelölés kedvéért

HF: általánosítsuk a példákat $n > 2$-re)

(1) Egyenletes: legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, olyan, hogy $\overline{\mathring{D}} = D$.

$E(D)$ abszolút folyt

$$f_D(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|D|} & \text{ha } (x, y) \in D \\ 0 & \text{ha } (x, y) \notin D \end{cases}$$

pl. D szép geometriájú ...

Hf számoljuk ki D marginálisait, ha

(1) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

(2) $D = \{(x,y) \mid |y| \leq x^2, \ |x| < 1\}$

(2) 2-dim. (általános) Gauss:

legyen: $m, n \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

2×2 szimmetrikus pozitív definit mátrix

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{a(x-m)^2 + 2b(x-m)(y-n) + c(y-n)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\det A}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle (x-m, y-n)\, A \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} \right\rangle\right]$$

Hf. • ellenőrizzük, hogy valóban sűrűségfv

• számoljuk ki a marginális sűrűségeket!

(3) d-dimenziós Gauss (normális):

$$\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{R}^d$$

A $d \times d$-es valós, szimmetrikus, pozitív definit

$$f_{\vec{m},A}(x_1,\dots,x_d) := \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle (\vec{x}-\vec{m})\, A\, (\vec{x}-\vec{m})^T \right\rangle\right\}$$

[diagonalizálás ....]

Függetlenség:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\quad (X, Y, \dots, Z) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

val. változók függetlenek ha bármely

$I, J, \dots, K \subset \mathbb{R}$ Borel halmazokra

a $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$, $\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in J\}$, ...

$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in K\}$ események

teljesen függetlenek.

Állítás Az $(X, Y, \dots, Z)$ val. változók akkor és csak akkor függetlenek, ha együttes eloszlásuk faktorizálódik a marginálisok szorzatára:

$F(x, y, \dots, z) = F_1(x) \cdot F_2(y) \cdots F_n(z)$

Abszolút folytonos esetben a sűrűségfüggvény is faktorizálódik

$f(x, y, \dots, z) = f_1(x)\, f_2(y) \cdots f_n(z)$

$\boxed{* \to \%}$

(*) Állítás: független függvényei is függetlenek:
Legyenek $X, Y, \dots, Z$ független val. változók $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-n és $\varphi, \psi, \dots, \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények.
Ekkor $\varphi(X), \psi(Y), \dots, \eta(Z)$ is független val. változók.

Példák

(1) $\xi \equiv$ const. független bármely más változótól

(2) $(X, Y, \dots, Z)$ egyenletes eloszlású az

$$[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times \dots \times [c_1, c_2] \text{ téglatestben}$$

akkor függetlenek és egyenletes eloszlásúak a megfelelő intervallumokban

(3) független Gauss-ok:

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad \sigma_i > 0$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_d} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

Függetlenek tartozóknak várhatóértéke faktorizálódik!

Kovariancia = a függőség egyik lehetséges mérőszáma

kovariancia mátrix

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\} =$$

$$= \mathbb{E}\, XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

Gauss-ok kovariancia mátrixa

A^{-1}

X, Y függetlenek $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

Apró tételek (diszkrétben kitanulhatók, diszkrét approximációból következnek).

Tétel Várható érték lineáris. Azaz: $(X, Y, \dots, Z)$ L^1 val. változók; $a, b, \dots, c \in \mathbb{R}$ konstansok.

Ekkor $S := aX + bY + \dots + cZ$ is L^1 val változó és

$$\mathbb{E}S = a\,\mathbb{E}X + b\,\mathbb{E}Y + \dots + c\,\mathbb{E}Z.$$

Tétel (Schwarz) $X, Y \in L^2(\Omega, P)$

Ekkor $\left|\mathbb{E}(X \cdot Y)\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y^2}$

Biz

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(\lambda) := \mathbb{E}\left[(X + \lambda Y)^2\right]$

$0 \leq \varphi(\lambda) = \mathbb{E}X^2 + 2\lambda\,\mathbb{E}(XY) + \lambda^2\,\mathbb{E}Y^2$

$\Rightarrow$ diszkrimináns ≤ 0

azaz: $\{\mathbb{E}(XY)\}^2 \leq \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y^2$ QED.

Tétel Összeg szórásnégyzete:

$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in L^2(\Omega, P)$ val. változók

Ekkor
$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var X_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n Cov(X_i, X_j)$$

Biz
$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)^2 =$$
$$= E\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right\}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{E(X_i - EX_i)^2}_{Var(X_i)} + \sum_{i\neq j=1}^n \underbrace{E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)}_{Cov(X_i, X_j)}.$$

Követk Ha $(X_1, \ldots, X_n)$ páronként függetlenek, akkor
$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

Tóth Bálint : Valószínűség számítás 12.

Nagy Számok Törvényei

Bernoulli NSZT:

S_n $BIN(p,n)$ eloszlású $P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$\varepsilon>0$: $$P\left(\left|\frac{S_n-np}{n}\right|>\varepsilon\right)\le\frac{2(pq+\varepsilon)}{n\varepsilon^2}\to 0$$

amint $n\to\infty$

De: $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, ahol X_j-k

független azonos eloszlásúak $P(X_i=1)=p$
$P(X_i=0)=q$
$\mathbb{E}X_i = p$

Célunk: általánosítani

$X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlásúak

$\mathbb{E}|X_i|<\infty$; $\mathbb{E}X_i = m \in \mathbb{R}$

Igaz-e, hogy $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)}{n}\right|>\varepsilon\right)\to 0$?

 (2)

Markov egyenlőtlenség: (A.A. Markov 1856–1922)

Legyen $Y \geq 0$ val. változó

$\forall \lambda > 0$-ra $\quad P(X \geq \lambda) \leq \dfrac{E(X)}{\lambda}$

Biz $E(X) \geq E(X \cdot 1_{\{X \geq \lambda\}}) \geq \lambda E(1_{\{X \geq \lambda\}})$

$= \lambda P(X \geq \lambda)$ □

$\boxed{\text{mert } X \geq 0}$

Következmény:

Csebisev egyenlőtlenség (P.L. Csebisev 1821–1894)

Legyen Y valós val. változó (megfordítás is kell)

$EY^2 < \infty$, $EY =: m$, $Var\,Y = EY^2 - (EY)^2 =: \sigma^2$

$P(|Y - m| \geq \lambda) \leq \dfrac{\sigma^2}{\lambda^2} \qquad \forall \lambda > 0$-ra

Biz Alk. Markov egyenlőtlenséget $Z = (Y-m)^2$-re □

Általánosított Markov.

$Y \in \mathbb{R}$ val változó, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ monoton ↑

$P(Y \geq \lambda) \leq \dfrac{E f(Y)}{f(\lambda)} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(5)

Biz. Általánosítsuk a Markov egyenlőtlenséget $Z = f(Y)$ -ra

(4) Általánosított Csebisev:

Y val. változó $(\in \mathbb{R})$

$E|X| < \infty$, $EX =: m$

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ monoton $\uparrow$

$$\mathbb{P}(|X-m| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E} f(|X-m|)}{f(\lambda)} \quad ; \lambda \geq 0.$$

Megjegyzés: (1) Az egyenlőtlenség éles:

Pl. Csebisev élessége: $\lambda > 1$ rögzített

$$\mathbb{P}(X = \pm\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X=0) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Követk.: Nagy Számok gyenge Törvénye. (NSzGyT)

Tétel Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású (L^2) val. változók

$$E(X_i) =: m \, , \quad Var(X_i) =: \sigma^2 < \infty$$

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Biz. Csebisev $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ -re.

NSZT Coupon collectorra:

... duma ...

$$T_n = \tau_1^{(n)} + \tau_2^{(n)} + \dots + \tau_n^{(n)}$$

$\tau_k^{(n)} : 1 + GEO\left(p = \frac{n-k+1}{n}\right)$, függetlenek

$$\mathbb{E}\left(\tau_k^{(n)}\right) = \frac{n}{n-k+1} \qquad \mathbb{D}^2\left(\tau_k^{(n)}\right) = \frac{n^2}{(n-k+1)^2}$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\tau_k^{(n)}\right) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n \log n + \mathcal{O}(1)$$

$$\mathbb{D}^2(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2\left(\tau_k^{(n)}\right) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = C \cdot n^2 + \mathcal{O}(n)$$

$$\frac{\mathbb{D}(T_n)}{\mathbb{E}(T_n)} \longrightarrow 0 \quad :$$

$$\boxed{\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1}$$

(4)

$$P\left(|Y - EY| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{Var(Y)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ □

Megjegyzés 1) második momentum feltétel gyengíthető

2) Feltételek általánosíthatóak $X_1, X_2, \dots$ L^2-val változók

$\forall\, i \neq j$: $Cov(X_i, X_j) \leq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2} = 0$

3) Szeria sorozatok ...

4) Emlékeztetünk Weierstrass approx. tételének Bernstein féle bizonyítására.

Miért GYENGE törvény?

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\quad X_i$ független azonos eloszlásúak ugyanazon az Ω-n értelmezve

NSzGyT $\quad \left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) \right|$ kicsi, nagy valószínűséggel

De $\quad$ konvergál-e 0-hoz, azaz $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{?} m$

Ez egy másik kérdés.

Analízis kitérő: — 109 —

Stirling formula: (James Stirling, Abraham deMoivre XVIII. sz. első fele)

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1+\varepsilon_n)$$

$$0 < \varepsilon_n < e^{\frac{1}{12n}} - 1 < \frac{1}{(12-\varepsilon)n}$$

$$1 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} < e^{\frac{1}{12n}} = 1+\varepsilon_n$$

Motiváció: $n!$ iszonyú gyorsan nő és nehezen számolható. $\boxed{k \ll n}$

$$\binom{2n}{n-k} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{(n-k)!\,(n+k)!}\, 2^{-2n} \approx$$

$$\approx \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,(\cancel{2n})^{2n}\,\sqrt{\cancel{2}n}\,\cancel{e^{-2n}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\underbrace{(n-k)^{n-k}}_{\cancel{n^{n-k}}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}}\,\underbrace{\sqrt{n-k}}_{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}}\,\cancel{e^{-(n-k)}}\,\sqrt{2\pi}\,\underbrace{(n+k)^{n+k}}_{\cancel{n^{n+k}}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}}\,\underbrace{\sqrt{n+k}}_{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\,\cancel{e^{-(n+k)}}}\,\cancel{2^{-2n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}} \quad \dots$$

Stirling formula bizonyítása:

Miért igaz? $\lg n! = \sum_{k=1}^{n} \lg k$.

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{k-1}^{k} \lg x \, dx < \lg k < \int_{k}^{k+1} \lg x \right\}$$

$$x\lg x - x \Big|_0^n = \int_0^n \lg x \, dx < \lg n! < \int_1^{n+1} \lg x \, dx = x \lg x - x \Big|_1^{n+1}$$

$$n \lg n - n < \lg n! < (n+1)\lg(n+1) - n$$

legyen $\quad d_n := \lg n! - \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\lg n - n\right]$

azaz $$e^{d_n} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

beláthatjuk hogy: $$d_\infty < d_n < d_\infty + \frac{1}{12n}$$

ahol $\quad d_\infty \in (0,\infty)$

Valamivel később azonosítjuk $\quad d_\infty = \lg \sqrt{2\pi}$

Stirling folyt.

$$d_n - d_{n+1} = \lg n! - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\lg n + n - \lg(n+1)! + \left(n+\tfrac{3}{2}\right)\lg(n+1) - (n+1)$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\lg\frac{n+1}{n} - 1$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1)\lg\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - 1$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t} - 1$$

Állítás ha $|t| < 1$, akkor $\lg(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k}$

Egyparaméteres: deriváltjuk mindkét oldalt

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-t)^k}{k}\right\} - 1$$

$$= \frac{1}{2t}\sum_{\ell=0}^{\infty} 2\cdot\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1} - 1 = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^{2\ell}}{2\ell+1} - 1 =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{t^{2\ell}}{2\ell+1} < \frac{1}{3}\cdot\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^{-2}-1} = \frac{1}{12n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

$$d_n > d_{n+1} \qquad d_n - \frac{1}{12n} < d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$$

Köv: $d_n \to d_\infty$, $d_\infty < d_n < d_\infty + \frac{1}{12n}$

①

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás

De Moivre-Laplace – alternatív

S_n BIN(p, n) eloszlású $(p \text{ fix}, n \gg 1)$

Bernoulli NSZT
$$P\left(\left| \frac{S_n - np}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{2(pq+\varepsilon)}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

De ennél lényegesen többet bizonyítottunk!

beláttuk, hogy

$$r > np + p \Rightarrow P(S_n > r) < \frac{rq}{(r-np)^2}$$

$$r < np - q \Rightarrow P(S_n < r) < \frac{(n-r)p}{(np-r)^2}$$

$s \geq 1$
$$P(|S_n - np| > s) = P(S_n > np+s) + P(S_n < np-s)$$
$$\leq \frac{\lceil np+s\rceil q}{(\lceil np+s\rceil - np)^2} + \frac{(n - \lfloor np-s\rfloor)p}{(np - \lfloor np-s\rfloor)^2} \leq$$
$$\leq \frac{(np+s+1)q}{s^2} + \frac{(nq+s+1)p}{s^2} = \frac{2npq + s+1}{s^2}$$

$$P(|S_n - np| > s) < \frac{2(npq+s)}{s^2} = \frac{2npq}{s^2} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{P\left(\frac{|S_n - np|}{\varphi(n)} > \varepsilon \right) \longrightarrow 0 \text{, ha } \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow \infty}$$

Hogyan viselkedik $\dfrac{S_n - np}{\sqrt{n}}$?

A várható érték és a szórás:

$$X \text{ val. változó (diszkrét)}: \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

- Várható érték: az eloszlás centruma, tömegközéppontja

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i \qquad (\text{más jelölés } M(X))$$

- Szórásnégyzet: az eloszlás szétszórtsága, nyomatéka

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$
$$= \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2$$
$$(\text{más jelölés } \mathbb{D}^2(X))$$

$$\text{szórás} = \sqrt{\text{szórásnégyzet}}$$

$$E(S_n) = \sum_{k=0} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 = \dots = npq =: \sigma_n^2$$

Tehát azt kérdezzük, hogy hogyan viselkedik

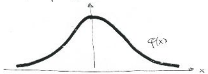
$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} .$$

Standard normális (Gauss) eloszlás: $N(0,1)$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

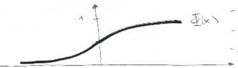
$\Phi : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$

Alaptulajdonságai:



$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy = 1$

Biz...



- Φ folyt. (sőt pl. C^∞)
- szigorúan növekvő
- $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$

Φ valószínűségi eloszlásfüggvény
φ sűrűségfüggvény

- $\Phi(x) = P(X<x)$
- $\Phi(b)-\Phi(a) = P(X\in(a,b))$
- $\varphi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{P(X\in(x,x+dx))}{dx}$

Szimmetriái: $\varphi(-x) = \varphi(x)$

$\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$

Aszimptotika $x \to \pm\infty$ kor: φ aszimptotikus viselkedését (gyors lecsengését) jól értjük

Φ aszimptotikája

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) \le 1-\Phi(x) \le \frac{1}{x}\varphi(x)$$

amint $x \to \infty$

Bizonyítás

$$\left\{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x)\right\}' = \dots = \left(1-\frac{3}{x^4}\right)\varphi(x)$$

$$\wedge$$

$$\left\{-\left(1-\Phi(x)\right)\right\}' = \dots = \varphi(x)$$

$$\wedge$$

$$\left\{-\frac{1}{x}\varphi(x)\right\}' = \dots = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\varphi(x)$$

$\int_x^\infty$ mindhárom azonosságot □

De Moivre – Laplace CHT

<u>Tétel</u> Legyen $p \in (0,1)$ rögzítve, $A < \infty$ mintén

$\exists$ C <u>abszolút</u> konstans (független p-től, A-tól), úgy hogy elég nagy n-re *

$$\max_{k:\ |k-np|\le A\sqrt{n}} \left| \frac{b(k;p,n)}{\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)} - 1 \right| \le \frac{C\cdot A^3}{(pq)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

□

Kicsit gyengítve (átszorozva ...):

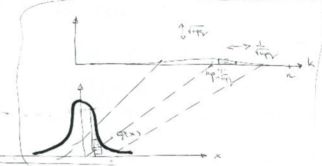
$$\max_{k:\ |k-np|\le A\sqrt{n}} \left| b(k;p,n) - \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \right| \le \frac{C'A^3}{(pq)^{5/2}}\ \frac{1}{n}$$

* $n > \left(\frac{2A}{pq}\right)^2$ $\qquad C' = C\sqrt{2\pi}$

Alternatív megfogalmazás:

$x \in \mathbb{R}$ rögzítve

$$\left| \frac{\sqrt{npq}\; b(np + x\sqrt{npq}; p, n)}{\varphi(x)} - 1 \right| \le \frac{C}{(pq)^2} \frac{|x|^3}{\sqrt{n}}$$



Konvergencia

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \in (a, b) \right) \longrightarrow \int_a^b \varphi(y)\,dy = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Biz

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \in (a, b) \right) = \sum_{k = np + a\sqrt{npq}}^{np + b\sqrt{npq}} b(k; n, p) =$$

$$\sum_{k = np + a\sqrt{npq}}^{np + b\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right) + \text{hiba} \xrightarrow{\text{Riemann}} \int_a^b \varphi(y)\,dy$$

$$|\text{hiba}| \le \frac{C(|a| + |b|)^3}{(pq)^{5/2}} \cdot \frac{1}{n} (b - a)\sqrt{npq} \to 0$$

De Moivre Laplace bizonyítása:

$$z := k - np \qquad |z| \le A\sqrt{n}$$

$$b(k;np) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(np+z)!\,(nq-z)!} p^{np+z} q^{nq-z}$$

Előkészítés

Helyettesítsük a faktoriálisokat Stirling-gel:

$$C r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r} \le r! \le C r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r} e^{\frac{1}{12r}}$$

$$b_1(k;np) = \frac{\cancel{C}\, n^{n+1/2} \cancel{e^{-n}} \cdot p^{np+z} q^{nq-z}}{C\,(np+z)^{np+z+\frac{1}{2}} e^{-(np+z)}\, \cancel{C}\,(nq-z)^{nq-z+\frac{1}{2}} e^{-(nq-z)}} =$$

$$= \frac{1}{C\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{np}\right)^{np+z} \left(1-\frac{z}{nq}\right)^{nq-z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{z}{np}\right)\left(1-\frac{z}{nq}\right)}}$$

$$\frac{b}{b_1} \le e^{\frac{1}{12n}}$$

$\frac{x}{2} \le x(1-x)$

$x \le 1/2$

$$\frac{b}{b_1} \ge e^{-\frac{1}{12(np+z)}} \cdot e^{-\frac{1}{12(nq-z)}} \ge e^{-\frac{1}{3\min(p,q)\,n}}$$

Ezt a legelején

$|z| < A\sqrt{n} \Rightarrow$ elég nagy $n > \{2A/\min(p,q)\}^2$ esetén

$$\left.\begin{matrix} np+z \\ nq-z \end{matrix}\right\} \ge n\,\frac{\min(p,q)}{2}$$

biztosítjuk, hogy

$$\left|\frac{z}{np}\right|, \left|\frac{z}{nq}\right| \le \frac{1}{2}$$

①

Második közelítés

$$b_2(k;np) = \frac{1}{C\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{np}\right)^{np+z}\left(1-\frac{z}{nq}\right)^{nq-z}}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \sqrt{\left(1+\frac{z}{np}\right)\left(1-\frac{z}{nq}\right)}$$

$$\overset{*}{\geq} \sqrt{1-\frac{A}{\sqrt{n}\,\min(p,q)}} \leq \frac{b_1}{b_2} \leq \sqrt{1+\frac{A}{\sqrt{n}\,\min(p,q)}} \leq 1+\frac{A}{2\min(p,q)\sqrt{n}}$$

$$\left\{1-\frac{A}{\min(p,q)\sqrt{n}}\right\}$$

Harmadik közelítés

Használjuk, hogy $|x| < \frac{1}{2}$ esetén

$$-|x|^3 \leq \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \leq |x|^3$$

$$\ln\left\{\left(1+\frac{z}{np}\right)^{np+z}\left(1-\frac{z}{nq}\right)^{nq-z}\right\} =$$

$$(np+z)\left\{\frac{z}{np} - \frac{z^2}{2(np)^2} \pm \left|\frac{z}{np}\right|^3\right\} + (nq-z)\left\{-\frac{z}{nq} - \frac{z^2}{2(nq)^2} \pm \left|\frac{z}{nq}\right|^3\right\}$$

$$= z - \frac{z^2}{2np} \pm \frac{|z|^3}{|np|^2} + \frac{z^2}{np} \pm \frac{|z|^3}{2|np|^2} \pm \frac{|z|^4}{|np|^3}$$

$$-z - \frac{z^2}{2nq} \pm \frac{|z|^3}{|nq|^2} + \frac{z^2}{nq} \pm \frac{|z|^3}{2(nq)^2} \pm \frac{z^4}{|nq|^3}$$

hiba

$$\frac{3}{2}\left(\frac{|z|^3}{n^2p^2} + \frac{|z|^3}{n^2q^2}\right) \leq \frac{3}{2}\frac{|z|^3}{n^2p_1^2}$$

$$\frac{z^4}{(np)^3} + \frac{z^4}{(nq)^3} \leq \frac{|z|^4}{n^3p_1^3}$$

$$= \frac{z^2}{2npq} \pm 2\left(\frac{|z|^3}{(np)^2} + \frac{|z|^3}{(nq)^2}\right) = \frac{z^2}{2npq} \pm \frac{2A^3(p^2+q^2)}{p^2q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$ (*)

Exponensbe:

$$b_3(k; p, n) = \frac{1}{C\sqrt{npq}} e^{-\frac{z^2}{2npq}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$e^{-\frac{2A^3(p^2+q^2)}{p^2q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \le \frac{b_2}{b_3} \le e^{\frac{2A^3(p^2+q^2)}{p^2q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

be kell még látni, hogy C (a Stirlingben) $= \sqrt{2\pi}$

Legyen $-\infty < a < b < \infty$ rögzítve

$$\left| \sum_{k=np+a\sqrt{npq}}^{np+b\sqrt{npq}} b(k; p, n) - \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{k=np+a\sqrt{npq}}^{np+b\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \right|$$

$$\le \frac{C(|a|+|b|)^4}{(pq)^2} n^{-1/2}$$

Riemann összeg

Ebből
$$\sum_{k=np+a\sqrt{npq}}^{np+b\sqrt{npq}} b(k, p, n) \longrightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \int_a^b \varphi(y)\, dy$$

Másrészt NSTT bizonyításából

$$1 - \frac{2}{R^2} - \frac{1}{R\sqrt{npq}} \le \sum_{k=np-R\sqrt{npq}}^{np+R\sqrt{npq}} b(k; n, p) \le 1 \qquad \lim_{n\to\infty}$$

$$1 - \frac{2}{R^2} \le \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \int_{-R}^{R} \varphi(y)\, dy \le 1$$

$\lim_{R\to\infty}$ ⊠

Feladat (prototípus)

Parlamenti választások alkalmával a Zöld Fülűek Pártjára vagy a Piros Orrúak Pártjára lehet szavazni. (Minden szavazó választ pártot.)

ZFP szavazók aránya p
POP — " — $q = 1-p$ } ismeretlen

Közvéleménykutatók megkérdeznek n szavazót. (visszatevéses)

Ezek között ZFP szavazók (empirikus) aránya p'. Milyen nagynak kell n-nek lennie, ahhoz, hogy 99% biztonsággal mondhassák, hogy

$$p = p' \pm 0.005 \qquad \pm 0.025$$

p: ismeretlen; p': empirikusan ismert

$$p' = \frac{S_n}{n}$$

$$P\Big(|p'-p| < \underbrace{0.005}_{\delta}\Big) > \underbrace{0.99}_{1-\varepsilon} \qquad (0.025;\ 0.95)$$

$$P\left(\left|\frac{S_n - pn}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sqrt{pq}}\right) > 1-\varepsilon$$

pontosság; megbízhatóság; mintaméret

10.44

$$pq \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{pq}} \ge 2$$

$$P\left(\left| \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \right| < \frac{\sqrt{n}\,\delta}{\sqrt{pq}} \right) \ge$$

$$P\left(\left| \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \right| < 2\sqrt{n}\,\delta \right) \underset{\text{CHT}}{\approx} 2\Phi(2\sqrt{n}\,\delta) - 1$$

Ergo

$$\boxed{\Phi(2\sqrt{n}\,\delta) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$n \ge \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) / 2\delta \right)^2$$

A konkrét számokkal

$$n \ge \left(\Phi^{-1}(0.995) / 0.01 \right)^2 = (258)^2 =$$

$$66\,564.$$

$\varepsilon = 0.05$
$\delta = 0.025$

$$n \ge \left\{ \Phi^{-1}(0.975) / 0.05 \right\}^2 = \left(\frac{1.96}{0.05} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{196}{5} \right)^2 = 1536$$