NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Bálint Péter

Valószínűségszámítás vizsga, 2020. jan. 03.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%-os eredménynek számít.

Elm. 1. Milyen határesetben és pontosan milyen értelemben közelíthető a binomiális eloszlás Poisson eloszlással? Mondja ki és bizonyítsa be az erről tanult tételt. (13 pont)

Elm. 2. (a) Milyen tulajdonságok jellemzik egy X abszolút folytonos valószínűségi változó $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényét? A sűrűségfüggvény ismeretében hogyan kaphatjuk meg X eloszlásfüggvényét? (3 pont)

(b) Írja fel a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét, és bizonyítsa be, hogy ez valóban sűrűségfüggvény! (10 pont)

Elm. 3. (a) Hogyan definiáljuk az X és Y valószínűségi változók $Cov(X, Y)$ kovarianciáját? (2 pont)

(b) Igazak-e az alábbi állítások? Ha igen, bizonyítsa be, ha nem, mutasson ellenpéldát. (A független valószínűségi változók szorzatának várható érékére vonatkozó képletet is bizonyítsa, ezt elég diszkrét és/vagy együttesen abszolút folytonos eloszlású esetben.) (12 pont)

i. Ha $Cov(X, Y) = 0$, akkor X és Y függetlenek.

ii. Ha X és Y függetlenek, akkor $Cov(X, Y) = 0$.

Gyak. 1. A 2 egység hosszúságú PQ szakaszt kettétörjük az egyenletes eloszlással választott R pontban. Jelölje a PR szakasz hosszát X. Ezek után a megmaradó, $2-X$ egység hosszú RQ szakasz mentén választunk egyenletes eloszlással egy S töréspontot. Jelölje az RS szakasz hosszát Y.

(a) Írjuk fel az (X, Y) pár közös sűrűségfüggvényét. Figyeljünk a tartományokra. (7 pont)

(b) $\mathbb{E}(Y|X = x) =$? (3 pont) $\mathbb{E}(Y) =$? (3 pont)

(c) Szerkesszünk egy téglalapot, melynek két oldalhossza X, illetve Y. Számoljuk ki a téglalap területének várható értékét! (7 pont)

Gyak. 2. Misi Mókus 2020 január 1-én reggel kibont egy 4 kg-os (azaz 4000 g-os) mogyorókrémes bödönt. Aznap, és ezt követően minden reggel elfogyaszt egy adag mogyorókrémet, melynek mennyisége egyenletes eloszlású a $[9\text{g}, 13\text{g}]$ intervallumon. Az egyes reggeli adagok függetlennek tekinthetőek. Mi a valószínűsége, hogy a 4kg-os bödön kitart a 2020-as év végéig? (Megj.: A 2020-as év 366 napos.) Használja a centrális határeloszlás-tételt, standard normális eloszlás táblázat a hátoldalon! (17 pont)

Gyak. 3. (a) Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike előfordul? (Itt eredményként egy számadatot várunk, nem egy több tagból álló szummát.) (5 pont)

(b) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul? (Használja a szita formulát. Itt eredményként egy néhány tagból álló szummát is elfogadunk.) (10 pont)

(c) Dobókockával addig dobálunk, amíg 1-től 6-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (8 pont)

Bónusz Legyen most a „kocka” oldalainak N száma véletlen: a kockának $N = n$ oldala van $\frac{c}{n^2 \ln^2 n}$ valószínűséggel, ahol c alkalmas konstans. Addig dobálunk, amíg 1-től N-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Jelölje X, hogy ehhez hány dobásra van szükség. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{E}X = \infty$. (10 pont)

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000