NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Bálint Péter

Valószínűségszámítás vizsga, 2020. január 15.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%-os eredménynek számít.

Elm. 1. Legyen $\lambda > 0$ és legyen az η valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Mit értünk az alatt, hogy η örökifjú? (3 pont) Bizonyítsa, hogy η valóban rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. (7 pont)

Elm. 2.
(a) Legyen az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y)$. Hogyan kapjuk meg a peremsűrűség-függvényeket, valamint a feltételes sűrűségfüggvényeket? (4 pont)
(b) Legyen D_1 a $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$ csúcspontú téglalap, míg D_2 az $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ csúcspontú négyzet. Igazak-e az alábbi állítások? Indokoljon! (8 pont)
   i. Ha (X, Y) együttes eloszlása egyenletes D_1-n, akkor X és Y függetlenek.
   ii. Ha (X, Y) együttes eloszlása egyenletes D_2-n, akkor X és Y függetlenek.

Elm. 3.
(a) Mondja ki és bizonyítsa be a Markov egyenlőtlenséget! (6 pont)
(b) Mondja ki és bizonyítsa be a Csebisev egyenlőtlenséget! (5 pont)
(c) Mondja ki és bizonyítsa be a Nagy Számok Gyenge Törvényét! (7 pont)

Gyak. 1. Odüsszeusz már nagyon szeretne hazajutni Ittakába, de magára haragította Poszeidónt, aki bosszúból véletlenszerűen teleszórta a tengert örvényekkel. Az örvények kör alakúak, sűrűségük a tengeren 3 örvény 10 négyzetkilométerenként. Ha egy hajó egy örvény középpontjához 50 méternél közelebb kerül, menthetetlenül elsüllyed, ha ennél távolabb halad el, sértetlenül mehet tovább. Odüsszeusz nem tudja, hol vannak az örvények, nyílegyenes úton hajózik Ittakába. Ugyanakkor tanult valószínűségszámítást, így kiszámolta, csupán 1% esélye van, hogy sértetlenül hazajusson. Milyen messze van Odüsszeusz Ittakától? (15 pont) (A végpontoknál adódó esetleges korrekciókat elhanyagolhatja. Tekintheti pl. a partszakaszt a kiindulópontnál és Ittakánál is Odüsszeusz útvonalára merőleges egyenesnek.)

Gyak. 2. Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke (8 pont) és szórása (10 pont)?

Gyak. 3. Legyen (U, V) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Legyen továbbá $X = \dfrac{U+V}{2}$ és $Y = \dfrac{U-V}{2}$. (Standard normális eloszlás táblázat a hátoldalon.)
(a) Mutassuk meg, hogy X és Y függetlenek, továbbá $X \sim \mathcal{N}(0, 4)$ és $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. (*Súgó:* Számoljuk ki az (X, Y) pár kovarianciamátrixát.) (8 pont)
(b) Legyen M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái (X, Y). Határozzuk meg a következő események valószínűségét:
   i. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 2 \}$; (6 pont)
   ii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \}$; (6 pont)
   iii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \ge 0;\ |x| \le 2;\ |y| \le 1 \}$; (7 pont)

Bónusz $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 2y \le x \}$. (10 pont)

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000