Utolsó valószínűségszámítás 1 gyakorlat, 2023

Centrális határeloszlás-tétel (C.H.T.): Ha $X_1, X_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, továbbá $S_n = X_1 + \dots + X_n$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, \mathrm{d}y.$$

(Speciális eset: ha $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$, akkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, és visszakapjuk a de Moivre-Laplace tételt)

1. Határozzuk meg a $\mathrm{GEO}(p)$ és az $\mathrm{UNI}[a, b]$ eloszlások momentumgeneráló függvényét, és számoljuk ki ez alapján a várható értéküket és a szórásnégyzetüket!

2. Adott száz égőnk, melyeknek az élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égő.

3. Egy tárgy vizsgáján a diákok pontszámának várható értéke 74, szórása 14. Az első vizsgát 25-en, a másodikat 64-en írják meg. Becsüljük meg annak a val.ségét, hogy
   (a) az első vizsgán az átlag pontszám legalább 80.
   (b) a második vizsga átlagpontszáma jobb az elsőénél.
   (c) a második vizsga átlagpontszáma legalább 2.2 ponttal jobb az elsőénél.
   (d) a második vizsga átlagpontszáma közelebb esik a 74-hez, mint az elsőé.

4. Egy csillagász egy μ távolságra levő objektum távolságát méri. Méréseinek eredményei f.a.e. val.változók μ várható értékkel és 2 fényév szórással. Hányszor lell mérnie, hogy az átlag legalább 0.5 fényév pontos legyen legalább 95% valószínűséggel?

5. Feldobunk egy szabályos érmét 60-szor, jelölje a fejek számát X.
   (a) Becsüljük a Csebisev egyenlőtlenség segítségével a $\mathbb{P}(|X - 30| \geq 20)$ valószínűséget.
   (b) Legyen $Y_\beta := \exp(\beta X)$. $\mathbb{E}(Y_\beta) =?$
   (c) $\mathbb{P}(X \geq 50) \leq ?$ (ha Y_β-re alkalmazzuk a Markov egyenlőtlenséget)
   (d) Keressük meg azt a β-t, amelyik a legjobb felső becslést adja.
   (e) $\mathbb{P}(|X - 30| \geq 20) \leq ?$

6. X úr vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. Menetrend szerint a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje normális eloszlású valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 3 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétol független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 4 perc.
   (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy X úr a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?
   (b) X úr hazafelé a menetrend szerint 17:40-kor érkezo buszról leszállva szeretné elérni a menetrend szerint 17:49-kor induló vonatot. A járművek érkezési, illetve indulási idejének szórása ismét 4, illetve 3 perc, és az átszállás visszafelé is két percet igényel. Egy évben 220 munkanappal számolva, mi a valószínűsége, hogy X úr hazafelé több alkalommal kési le a csatlakozást, mint munkába menet?