

6.4 Az  $A$  és  $B$  konstansok milyen értéke mellett lehetnek eloszlásfüggvények a következő függvények?

a)

$$F(x) = \exp(-Ae^{-Bx});$$

b) •

$$F(x) = A + B \operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$$

c) •

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \leq 0, \\ \frac{A+x}{1+Bx} & \text{ha } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

6.5 A  $C$  konstans milyen értéke mellett lehetnek sűrűségfüggvények a következő függvények? Ezekben az esetekben állapítsuk meg a várható értéket, valamint annak valószínűségét, hogy a megfelelő val. változó értéke  $\frac{1}{2}$  és 2 közé esik.

a) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos(2\pi x) & \text{ha } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

b) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot (-\ln(x/5)) & \text{ha } 0 < x \leq 5, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x^{-5} & \text{ha } 1 \leq x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

6.6 Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzintől?

6.7 Tudjuk, hogy minden  $Y$  nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{Y > t\} dt.$$

Mutassuk meg, hogy egy  $X$  nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^{\infty} nx^{n-1} \mathbf{P}\{X > x\} dx$$

teljesül. (Tipp: kezdjük azzal, hogy

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{X^n > t\} dt,$$

majd cseréljük változót ( $t := x^n$ .)

6.8 a) Legyen  $X$  valószínűségi változó várható értéke  $\mu$ , szórásnégyzete  $\sigma^2$ , és a harmadik momentuma is véges. Továbbá legyen  $g$  egy háromszor differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy  $X$  centrált harmadik momentuma elhanyagolható, akkor mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2} \sigma^2.$$

(Tipp: fejtsük  $g$ -t  $\mu$  körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!)

b) Legyen  $X$  egy  $\lambda$  várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha  $\lambda$  tart végtelenhez, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepödjünk meg. (Tipp: használjuk fel az előző feladatot  $\mathbf{E}(\sqrt{X})$  közelítésére!)

6.9 Legyen  $F(x)$  folytonos eloszlásfüggvény, és  $F(0) = 0$ . Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \leq 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségi számítási értelmet a fenti formulának.

6.10 Egyenletesen választunk egy pontot a  $(0, 1)$  intervallumból, jelölje ezt  $X$ . Mi annak a valószínűsége, hogy  $X$ ,  $1 - X$  és  $1/2$  háromszöget alkot?

6.11 Konstruálható-e olyan folytonos  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  függvény, amelyre  $\int_0^1 g(x) dx = 1$ ,  $\int_0^1 x \cdot g(x) dx = a$ ,  $\int_0^1 x^2 \cdot g(x) dx = a^2$ ?

Bónusz Ha egy találkozóra  $s \in \mathbb{R}$  perccel korábban érkezem a megbeszéltnél,  $a \cdot s$  petátot fizetek, ha  $s$  perccel kések,  $b \cdot s$ -t fizetek. Az utazás a mai kaotikus közlekedési feltételek miatt meglehetősen véletlen ideig tart, melynek sűrűségfüggvénye  $f(x)$ . Mikor induljak, ha a várható költséget szeretném minimalizálni? (Tipp: Írjuk fel a várható költséget integrálalakban és deriváljuk.)

6.12 •• A buszok rendre minden óra egészkor, 20-kor és 40-kor indulnak a megállóból. Ha véletlenszerűen érkezem 7:00 és 8:00 közt, mi annak a valószínűsége, hogy

- 5 percnél kevesebbet várok?
- 12 percnél többet várok?
- Ugyanez a két kérdés, ha 7:08 és 7:48 közt érkezem egyenletesen.
- És ha 7:00 és 7:30 közt érkezem egyenletesen?

6.13  $A$  felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg  $B$  felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

- Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy  $A$  felé, és hányadrészében  $B$  felé?
- És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?
- Mi a helyzet akkor, ha  $B$  felé gyakrabban, vagyis 7:05-től kezdve 10 percenként indulnak a buszok? Számoljuk ki az előző két kérdés valószínűségét erre az esetre is!

6.14 Egy busz  $A$  és  $B$  városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton; ilyenkor a legközelebbi szervízről kijönnek a szerelők és megjavítják a buszt a helyszínen. Pillanatnyilag egy buszszervíz található az  $A$  városban, egy a  $B$  városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervízt az  $A$  várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

6.15 •• Egy 20 méter hosszúságú csővezetékben véletlen (a cső mentén egyenletes eloszlású) helyen van egy elzáródás. A csővezeték egy az egyik végpontjától  $d$  méter távolságra levő ponton lehet tölteni (ahol  $0 \leq d \leq 20$  rögzített paraméter). Határozzuk meg a feltölthető vezeték szakasz hosszának várható értékét.

6.16 •• Egy téglalap oldalai 1, illetve 2 egység hosszúságúak. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással a téglalap belsejében. Jelölje  $\xi$  e pontnak a távolságát a téglalap legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

6.17 Pistike randevút beszélt meg Juliskával este 6-ra. Pistike két úton is eljuthat a megbeszélte randevú helyszínére, a két út között érmedobással dönt. Az utakon való végigjutás ideje két valószínűségi változót határoz meg:  $A$ -t és  $B$ -t.

a) Az  $A$  sűrűségfüggvénye (percekben számolva):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 5 \text{ vagy } x > 20, \\ \frac{2}{75}(x - 5) & \text{ha } 5 \leq x < 10, \\ \frac{1}{75}(20 - x) & \text{ha } 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

b) A  $B$  sűrűségfüggvénye pedig:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 5, \\ \frac{1}{10} \exp\left(-\frac{x-5}{10}\right) & \text{ha } x > 5. \end{cases}$$

Pistike 6-kor indul útnak, mert elfelejtette nézni az órát. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha Juliska nem egy türelmes természet, és maximum tíz percet hajlandó várni?

6.18 Egy  $l$  hosszúságú ropit taláalomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebb eloszlásfüggvénye?

6.19 Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk eloszlásfüggvényét.

6.20 Válasszunk a háromdimenziós egységgömb belsejében egy pontot egyenletes eloszlással, és jelölje  $\xi$  ennek a pontnak távolságát a gömb középpontjától. Határozzuk meg  $\xi$  eloszlásfüggvényét és várható értékét.

6.21 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje  $\xi$  e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.