8.1 A következő feladatokban adott a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ill. sűrűségfüggvénye. Meg kell határozni az ξ függvényeként értelmezett $X, Y, Z, \dots$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

(a) ξ egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Y := \xi^3$, $Z := \tan(\frac{\pi}{2}\xi)$, $U := \sin(\pi\xi)$.

(b) • ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := 3\xi - 2$, $Z := \sqrt[4]{\xi}$.

(c) ξ standard normális eloszlású; $X := \xi^2$, $Y := \xi^{-2}$.

(d) • ξ egyenletes eloszlású a $[-2, 4]$ intervallumban; $U := \cos(\frac{\pi}{2}\xi)$.

(e) ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := -3\xi + 2$, $Y := e^{\xi}$.

(f) ξ sűrűségfüggvénye $2x$ a $[0, 1]$ intervallumon, egyébként 0, $Y := \xi^{-2}$.

8.2 Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3,\ 4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x - 1| + |x + 1|$. Határozzuk meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adjuk meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris nem csökkenő függvények összegére.

8.3 Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2,\ \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

8.4 (a) Legyen X standard Cauchy-eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X és $1/X$ azonos eloszlásúak. (Emlékeztető: Egy standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.)$$

(b) Mutassuk meg, hogy a fenti tulajdonság az

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & \text{ha } |y| \le 1 \\ 1/(4y^2) & \text{ha } |y| > 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű Y valószínűségi változóra is igaz, vagyis $1/Y$ eloszlása megegyezik Y eloszlásával.

8.5 **a)** Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és $c > 0$. Mutassuk meg, hogy cX szintén exponenciális eloszlású, λ/c paraméterrel.

b) Most legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mi az $Y = aX + b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

c) Z eloszlása megegyezik $2Z$-jével. Mi ez a Z?

Bónusz Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$ a $[0, 1]$ intervallumon és 0 egyébként. Mi lesz $\frac{1}{X}$ törtrészének sűrűségfüggvénye?

8.6 ••

a) Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (*Y eloszlását lognormálisnak nevezik.*)

b) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy ekkor CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (*Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk tudásunkat a normális valószínűségi változó lineáris transzformáltjairól.*)

c) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $\mu = -0.4$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

8.7 Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $Y = F(X)$. Mutassuk meg, hogy Y valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0,\ 1)$ intervallumon.

8.8 Legyen X egy valószínűségi változó, amelyre $\mathbf{P}\{X = 0\} = 0$, és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy X és Y azonos eloszlásúak legyenek?

8.9 Bizonyítsuk be, hogy ha ξ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1 - \xi^2)$, $Z := (3\xi - \xi^3)/(1 - 3\xi^2)$, akkor X, Y és Z szintén Cauchy eloszlású. (*Tipp: Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \mathrm{tg}(\alpha)$, akkor $1/\xi = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $2\xi/(1 - \xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1 - 3\xi^2) = \mathrm{tg}(3\alpha)$.*)

8.10 Egy l hosszú ropit találomra (egyenletes eloszlással választott pontban) kettétörünk.

(a) Jelöljük X-szel az így kapott két rész hosszainak négyzetösszegét. Határozzuk meg az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

(b) • Jelöljük Y-nal a két részből képezett téglalap területét. Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

8.11 Legyen ξ az X pont távolsága a sík $(1,\ 1)$ koordinátájú pontjától, ha

a) X-et az x-tengely $[0,\ 1]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk;

b) X-et az x-tengely $[0,\ 2]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk.

A két esetben határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

8.12 Egy ℓ hosszú ropit két egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

a) Mi az így nyert három darab közül a legrövidebb hosszának a várható értéke?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három darabból háromszöget alkothatunk?

8.13 •• Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.

8.14 Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha

a) • X a dobott számok minimuma, Y a két dobott érték összege;

b) X az első kocka eredménye, Y a dobott számok maximuma;

c) rendre X, Y a dobott számok minimuma, ill. maximuma.

8.15 Legyenek X és Y független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. (Azaz: $\mathbf{P}\{X = i,\ Y = j\} = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} \cdot p,\ i,\ j > 0$.)

a) Sejtsük meg $\mathbf{P}\{X = i \,|\, X + Y = n\}$ értékét. (*Tipp: tegyük fel, hogy egy cinkelt érmét dobunk fel, egymás után sokszor. Az érme p valószínűséggel ad fejet. Ha a második fej az n-edik feldobásnál jön, mi az első fej bekövetkezése idejének eloszlása?*)

b) Igazoljuk (a)-beli eredményünket számolással. (*Tipp: ugye még emlékszünk mi független geometriai várakozási idők összegének az eloszlása?*)

8.16 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény ($x,\ y \in \mathbb{R}$)?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

8.17 Legyen $(X,\ Y)$ az $\{(x,\ y)\ :\ x^2 + y^2 \le 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordináta-párja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

8.18 •• Határozzuk meg a peremsűrűség-függvényeket! Független-e X és Y?

a) Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \left\{ \begin{array}{cl} A \cdot (x^2 y + y^2 x) & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{array} \right\};$$

ahol az A pozitív konstans értéke meghatározandó.

b) Az (X, Y) pont eloszlása egyenletes a $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2|x| + \dfrac{|y|}{2} \le 1\right\}$ tartományon.

8.19 Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között egyenletes eloszlású időben érkezik,

a) határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.

b) Mi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?

8.20 n pontot függetlenül egyenletesen elosztunk egy kör kerületén, és szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy mind egy félkörbe esnek (vagyis annak valószínűségét, hogy van egy olyan, a kör középpontján átmenő egyenes, melynek az összes pont az egyik oldalán van). Jelölje $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ a pontokat. Legyen A az az esemény, hogy az összes pont egy félkörbe esik, és A_i az az esemény, hogy az összes pont abba a félkörbe esik, amely P_i-től indul az óramutató járásával egyező irányban, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

a) Fejezzük ki A-t az A_i-k segítségével.

b) Igaz-e, hogy az A_i-k kölcsönösen kizáróak?

c) Határozzuk meg $\mathbf{P}\{A\}$-t.

d) Most válaszoljuk meg a következő kérdést: ha egy *körlapon* egymástól függetlenül n pontot egyenletes eloszlással elhelyezünk, mi a valószínűsége, hogy a kör középpontja benne lesz a pontok konvex kombinációiként előálló halmazban?

8.21 Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,\ y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Független-e X és Y? És ha a közös sűrűség

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < y < 1,\ 0 < x < y, \\ 0, & \text{egyébként?} \end{cases}$$

8.22 Legyenek $X,\ Y$ független, $[0,\ 1]$-en egyenletes valószínűségi változók. Mi a távolságuk sűrűségfüggvénye?

8.23 **Rendezett minták.** Leszórunk a $[0,\ 1]$-re egyenletesen n pontot. Mi a k. pont sűrűségfüggvénye? Rávezető kicsit egyszerűbb kérdések: Mi a maximum eloszlása? Mi a sűrűségfüggvény? És a 2. legnagyobbé? (Hogyan kapjuk meg deriválás nélkül, közvetlenül?)