$\boxed{10.16}$ $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]$

a) $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) =$

$= \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[x>0] \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]$

$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]$

---

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]\,dx =$

$= \int_{y}^{\infty} \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[0<y]\,dx = \mathbb{1}[0<y]\lambda^2 \cdot \int_{y}^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx =$

$= \lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}[0<y]$, TEHÁT $Y \sim EXP(\lambda)$,

TEHÁT $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$

---

c) $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x)\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]\,dy = \frac{1}{x} \int_{0}^{x} y\,dy = \frac{x}{2}$

ÉS VALÓBAN: Y EGYENLETES $[0, X]$-EN,

TEHÁT $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \frac{x}{2}$

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[0<y<x]}{\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}[0<y]} = \star$ $\boxed{\text{TFH } y>0}$

1. OLDAL

$$\text{☆} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x-y)} \cdot \mathbb{1}[y < x] =: g(x)$$

HA $Z_1 \sim EXP(\lambda)$, AKKOR $Z_1 + y$ SŰRŰSÉG-FÜGGVÉNYE PONT EZ A $g(x)$.

ÍGY $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x)\,dx = \mathbb{E}(Z_1 + y) =$

$= \mathbb{E}(Z_1) + y = \frac{1}{\lambda} + y$

---

d) ISMERT TÉNY: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + y\right) \cdot f_Y(y)\,dy = ☺$

LAW OF UNCONSCIOUS STATISTICIAN

$☺ = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lambda} + Y\right) = \frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}(Y) \overset{b)}{=} \frac{2}{\lambda}$

---

e) HA Y ÉS Z_1 FÜGGETLENEK ÉS $EXP(\lambda)$ ELOSZLÁSÚAK ÉS $X = Y + Z_1$, AKKOR

$f(x,y) = f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)$ UGYANAZ MINT (a), ÍGY

$$\underbrace{f_Y(y)}_{\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}[0<y]} \cdot \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (x-y)} \cdot \mathbb{1}[y<x]}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y + Z_1, Y) = \underbrace{\mathrm{Cov}(Y, Y)}_{= \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}} + \underbrace{\mathrm{Cov}(Z_1, Y)}_{= 0}$$

BILINEARITÁS

2. OLDAL

f) HA $\mathbb{Y}$ ÉS Z_1 FÜGGETLENEK ÉS AZONOS ELOSZLÁSÚAK EXP(λ) ELOSZLÁSSAL, AKKOR

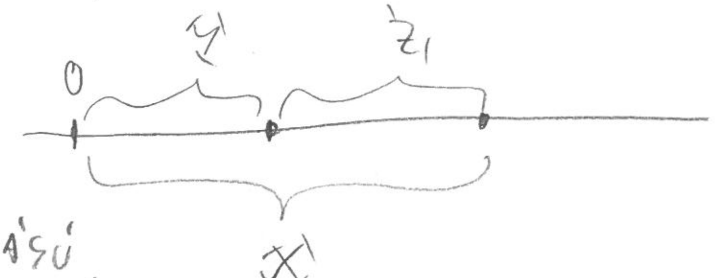
$\mathbb{Y} + Z_1$ SŰ.FV-E : $(f_{\mathbb{Y}} * f_{Z_1})(x)$ = KONVOLÚCIÓ =

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{Y}}(y) \cdot f_{Z_1}(x-y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}[y>0] \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot(x-y)} \cdot \mathbb{1}[x-y>0]\,dy$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda x} \cdot \int_0^x 1\,dy = \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}[x>0]$$

TANULSÁG:



λ INTENZITÁSÚ

$\mathbb{Y}$ EGY POISSON FOLYAMAT ELSŐ PONTJA

$\mathbb{X}$ A —"— —"— MÁSODIK —"—

Z_1 AZ ELSŐ ÉS MÁSODIK KÖZTI HÉZAG

EKKOR $\mathbb{Y}$ ÉS Z_1 FÜGGETLENEK ÉS EXP(λ) ELOSZLÁSÚAK, TOVÁBBÁ HA ISMEREM A MÁSODIK PONT $\mathbb{X}$ HELYÉT, AKKOR AZ ELSŐ PONT FELTÉTELES ELOSZLÁSA EGYENLETES $[0,\mathbb{X}]$-EN, HASONLÓAN AZ $\boxed{5.14}$-ES FELADATHOZ.

$\boxed{10.4}$ X = TISZTA SOROZATOK SZÁMA

$A_i := \{ i\text{-EDIK DOBÁS FEJ} \}, \quad 1 \le i \le 10$

$B_i := \{ i\text{-EDIK ÉS } i+1\text{-EDIK DOBÁS KÜLÖNBÖZIK} \}$

$B_i = (A_i \cap A_{i+1}^c) \cup (A_i^c \cap A_{i+1}), \quad 1 \le i \le 9$

$X = 1 + \sum_{i=1}^{9} \mathbb{1}[B_i]$ (VÁLTÁSOK SZÁMA PLUSZ EGY)

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{LIN.}}{=} 1 + \sum_{i=1}^{9} \mathbb{P}(B_i) = 1 + 9 \cdot \underbrace{\left(p\cdot(1-p) + (1-p)\cdot p \right)}_{q}$$

$\boxed{q = \mathbb{P}(B_i)}$

$\mathrm{Var}(X) = ?$ $\quad Y := X - 1, \quad \mathbb{1}[B_i] =: Y_i$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y, Y) =$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{9} Y_i, \sum_{j=1}^{9} Y_j \right) = \sum_{i,j=1}^{9} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \star$$

$\boxed{i=j}$: $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{Var}(Y_i) = q \cdot (1-q)$

$\boxed{|i-j| \geq 2}$: $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$, MERT Y_i ÉS Y_j FÜGGETLENEK, MERT Y_i MÁS ÉRMÉKTŐL FÜGG, MINT Y_j

$\boxed{|i-j| = 1}$: $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i \cdot Y_j) - \underbrace{\mathbb{E}(Y_i)}_{q} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y_j)}_{q}$

$$\mathbb{E}(Y_i \cdot Y_j) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}[B_i] \cdot \mathbb{1}[B_j] \right) = ☺$$

☺ $= \mathbb{E}(\mathbb{1}[B_i \cap B_j]) = \mathbb{P}(B_i \cap B_j) =$ ☹

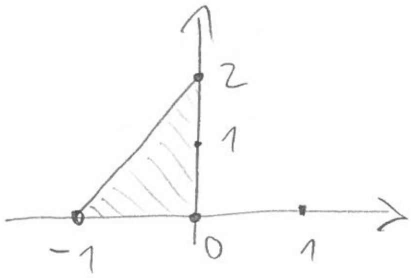
FELTEHETJÜK, HOGY $j = i+1$

☹ $= \mathbb{P}\left((A_i \cap A_{i+1}^c \cap A_{i+2}) \cup (A_i^c \cap A_{i+1} \cap A_{i+2}^c)\right)$

$= p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot (1-p) = \tilde{q}$

✪ $= \underbrace{9 \cdot q \cdot (1-q)}_{\text{DIAGONÁLIS TAGOK}} + \underbrace{2 \cdot 8 \cdot (\tilde{q} - q^2)}_{\text{DIAG. FELETTI ÉS ALATTI TAGOK}}$

$\boxed{10.12}$



(X, Y) KOVARIANCIA-MÁTRIXA:

$\underline{\underline{C}} = \begin{array}{|c|c|} \hline Var(X) & Cov(X,Y) \\ \hline Cov(X,Y) & Var(Y) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline b & c \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{|c|c|} \hline Var(X) & Cov(X, Z_1) \\ \hline Cov(X, Z_1) & Var(Z_1) \\ \hline \end{array}$ $\quad Var(X) = a$ ✓

$\boxed{\text{BILINEARITÁS}}$

$Cov(X, Z_1) = Cov(X, 7X + 2Y) =$

$= 7\, Cov(X, X) + 2\, Cov(X, Y) = 7a + 2b$

$Var(Z_1) = Cov(Z_1, Z_1) = Cov(7X + 2Y, 7X + 2Y) \overset{\text{BIL.}}{=\!=}$

$49 \cdot \underbrace{Cov(X, X)}_{a} + 7 \cdot 2 \cdot \underbrace{Cov(X, Y)}_{b} + 2 \cdot 7 \cdot \underbrace{Cov(Y, X)}_{b} + 2^2 \cdot \underbrace{Cov(Y, Y)}_{c}$

$\boxed{10.13 (a)}$ $\text{Corr}(X,Y) = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\cdot \text{Var}(Y)}}$

(HA A KOVARIANCIA BELSŐ SZORZÁS, AKKOR A KORRELÁCIÓ A BEZÁRT SZÖG KOSZINUSZA)

$X_i := \mathbb{1}[A_i]$, $A_i := \{i\text{-EDIK DOBÁS 1-ES}\}$

$Y_i := \mathbb{1}[B_i]$, $B_i := \{i\text{- } -''- \text{ 2-ES}\}$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $\quad X \sim BIN(n, \frac{1}{6})$, $Y \sim BIN(n, \frac{1}{6})$

$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \text{Var}(Y)$ $\quad$ $\boxed{\text{BILINEARITÁS}}$

$\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \text{Cov}(X_i, Y_j) =$

$= ☺$ HA $\boxed{i \neq j}$, AKKOR $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$, HISZ FÜGGETLENEK

HA $\boxed{i = j}$, AKKOR $\text{Cov}(X_i, Y_i) = \mathbb{E}(X_i Y_i) - \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y_i)}_{\frac{1}{6}}$

$\mathbb{E}(X_i Y_i) = \mathbb{P}(A_i \cap B_i) = 0$, ÍGY

$☺ = \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(X_i, Y_i) = \dfrac{-n}{36}$

$\text{Corr}(X,Y) = \dfrac{-n/36}{\sqrt{n \cdot \frac{5}{36} \cdot n \cdot \frac{5}{36}}} = -\dfrac{1}{5}$ NEGATÍVAN

KORRELÁLT: X ÉS Y EGYMÁS ELLEN DOLGOZNAK

$\boxed{10.22}$ $Y := X_1 + \ldots + X_n$

$\Psi(i,x) := \mathbb{E}(X_i \mid Y = x)$

<u>ÁLL</u>: $\Psi(i,x) = \Psi(j,x)$ $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$, HISZ

$X_1, \ldots, X_n$ F.A.E. (FÜGGETLENEK ÉS AZONOS ELOSZLÁSÚAK)

ÉS AZ $X_1 + \ldots + X_n = x$ FELTÉTEL IS SZIMMETRIKUS.

$\Psi(i,x) = \Psi(x)$

$$x = \mathbb{E}(x \mid Y = x) = \mathbb{E}(Y \mid Y = x) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y = x\right) =$$

LINEARITÁS

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i \mid Y = x) = n \cdot \Psi(x)$$

TEHÁT $\boxed{\Psi(x) = \frac{x}{n}}$, ÍGY $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 + \ldots + X_n = x) = \frac{x}{n}$

$\boxed{10.6}$ LÉVÉN, HOGY AZ ELOSZLÁSFV. FOLYTONOS, ÍGY 1 VALÓSZÍNŰSÉGGEL $X_1, \dots, X_m$ MIND KÜLÖNBÖZŐEK, ÉS ÍGY EGYÉRTELMŰEN NAGYSÁG-SORRENDBE RENDEZHETŐEK.

BÁRMELYIK NAGYSÁG-SORRENDBEN UGYANOLYAN VALÓSZÍNŰ, ÍGY $\frac{1}{m!}$ MINDEN KONKRÉT NAGYSÁG-SORREND VALÓSZÍNŰSÉGE.

$A_i := \{ X_i \text{ REKORD} \}$ <u>VEGYÜK ÉSZRE</u>:

1) A_i CSAK $X_1, \dots, X_i$ EGYMÁS KÖZTI SORRENDJÉTŐL FÜGG.

2) A_i FÜGGETLEN $X_1, \dots, X_{i-1}$ EGYMÁS KÖZTI SORRENDJÉTŐL.

1 & 2 $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_m$ ESEMÉNYEK TELJESEN FÜGGETLENEK.

1 $\Rightarrow \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{i}$

a) $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}[A_i] \right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(\mathbb{1}[A_i]) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$

b) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}[A_i] \right) \overset{\text{FÜGGETLENSÉG}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Var}(\mathbb{1}[A_i])$

$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i-1}{i^2}$