3.8 $A := \{\alpha$ KOCKÁT HASZNÁLJUK$\}$

$B := \{\beta$ KOCKÁT HASZNÁLJUK$\}$

$A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

$C_k := \{k$-ADIK KOCKADOBÁS EREDMÉNYE PIROS$\}$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ ESEMÉNYEK NEM FÜGGETLENEK, DE FELTÉTELESEN FÜGGETLENEK, HA MÁR TUDJUK AZ ÉRMEDOBÁS EREDMÉNYÉT.

a) $$\mathbb{P}(C_k) = \underbrace{\mathbb{P}(C_k \mid A)}_{2/3} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{P}(C_k \mid B)}_{1/3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

b) $$\mathbb{P}\left(C_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} C_i\right) = \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_k)}{\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{k-1})} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_k \mid A) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_k \mid B) \cdot \frac{1}{2}}{\mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{k-1} \mid A) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(C_1 \cap \ldots \cap C_{k-1} \mid B) \cdot \frac{1}{2}}$$

HA k NAGY

TEHÁT $C_1, \ldots, C_k$ TÉNYLEG NEM FÜGGETLENEK

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} \approx \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

HA k NAGY ÉS $k-1$-SZER PIROS, AKKOR SZINTE BIZTOS, HOGY A α KOCKÁT HASZNÁLJUK, ÉS AKKOR 2/3 A PIROS VAL.SÉGE.

$\boxed{3.4}$ X LEHETSÉGES ÉRTÉKEI: 0, 1, 2, 3, 4

KELL: $\mathbb{P}(X = r)$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$

KÖNNYEBB KISZÁMOLNI ELŐSZÖR:

$\mathbb{P}(X \geq r)$ ÉRTÉKÉT $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

$\mathbb{P}(X \geq r) = \mathbb{P}($AZ ELSŐ r MECCSET Ő NYERI$)$

$= \mathbb{P}($Ő ÉS A r MÁSIK JÁTÉKOS KÖZÜL Ő A LEGJOBB$)$

$= \dfrac{1}{r+1}$, HISZEN AZ EZEN $r+1$ JÁTÉKOS KÖZTI BÁRMELYIK RELATÍV SORREND UGYANOLYAN VALÓSZÍNŰ.

HISZEN $\{X \geq r+1\} \subseteq \{X \geq r\}$

$$p_r := \mathbb{P}(X = r) = \mathbb{P}(\{X \geq r\} \setminus \{X \geq r+1\}) =$$

$$= \mathbb{P}(X \geq r) - \mathbb{P}(X \geq r+1) = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} = \frac{1}{(r+1)\cdot(r+2)}$$

HA $r = 0, 1, 2, 3$

HA $r = 4$: $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \dfrac{1}{5}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{r=0}^{4} r \cdot p_r = 0 \cdot \frac{1}{1\cdot 2} + 1 \cdot \frac{1}{2\cdot 3} + 2 \cdot \frac{1}{3\cdot 4} + 3 \cdot \frac{1}{4\cdot 5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

$$= \sum_{r=1}^{4} \mathbb{P}(X \geq r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

MEGJ.:

p_1			
p_2	p_2		
p_3	p_3	p_3	
p_4	p_4	p_4	p_4

SORONKÉNT ÖSSZEADVA

OSZLOPONKÉNT ÖSSZEADVA

2. OLDAL

$\boxed{3.19}$ 3 KOCKA:

$$Y_i := \begin{cases} 1, \text{ HA AZ } i\text{-EDIK KOCKADOBÁSSAL NYERTEM} \\ 0, \text{ HA AZ } \text{—''—} \quad \text{—''—} \text{ NEM } \text{—''—} \end{cases}$$

$$X := Y_1 + Y_2 + Y_3 \qquad \boxed{X \sim BIN\left(3, \frac{1}{6}\right)}$$

BINOMIÁLIS ELOSZLÁSÚ

$$P_r := \mathbb{P}(X = r), \quad r = 0, 1, 2, 3$$

$$P_r = \binom{3}{r} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^r \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-r}$$

TUDJUK: $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3$$

NYEREMÉNYEM: Z_1 PETÁK

$$Z_1 = \begin{cases} X, & \text{HA } X \geq 1 \\ -1, & \text{HA } X = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Z_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3$$
$$= \mathbb{E}(X) - P_0 = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{-17}{216}$$

TEHÁT NEM FAIR EZ A JÁTÉK

HISZ A VÁRHATÓ NYEREMÉNYEM NEGATÍV

3.25

a) X := PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA VISSZATEVÉSSEL

X „OPTIMISTA" GEOMETRIAI ELOSZLÁSÚ (FÜGGETLEN PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA AZ ELSŐ SIKERIG) $X \sim GEO\left(\frac{1}{n}\right)$

EGYSZERI PRÓBÁLKOZÁS SIKERÉNEK VALÓSZÍNŰSÉGE

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1/n} = n$$

---

b) Y := PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA VISSZATEVÉS NÉLKÜL

$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$, Y EGYENLETES ELOSZLÁSÚ AZ $\{1, 2, \dots, n\}$ HALMAZON

HISZEN BÁRMILYEN KULCS-SORREND UGYANOLYAN VALÓSZÍNŰ, ÍGY BÁRMELYIK POZÍCIÓN UGYANAKKORA VALÓSZÍNŰSÉGGEL LESZ A JÓ KULCS.

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)}_{= \frac{(n+1) \cdot n}{2}}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2}$$

VISSZATEVÉSSEL VÁRHATÓAN KB FELEANNYI IDŐ ALATT TALÁLOM MEG A JÓ KULCSOT

$\boxed{3.20}$ A MA MEGHIBÁSODÓ GÉPEK SZÁMA: X

$X \sim BIN(n, p)$

$$\mathbb{P}(\text{MA LEÁLL A RENDSZER}) = \mathbb{P}(X \geq r) =$$

$$= \sum_{l=r}^{n} \binom{n}{l} \cdot p^{l} \cdot (1-p)^{n-l} =: q$$

HA AZ Y-ADIK NAPON ÁLL LE A RENDSZER, AKKOR Y „OPTIMISTA" GEO. ELOSZLÁSÚ (FÜGGETLEN KÍSÉRLETEK, SZÁMUK AZ ELSŐ „SIKERIG", AHOL „SIKER" = „MEGHIBÁSODÁS")

$Y \sim GEO(q)$

$$\mathbb{P}(Y = t) = \underbrace{(1-q)^{t-1}}_{\substack{t-1 \text{ NAPON} \\ \text{ÁT} \\ \text{NINCS} \\ \text{MEGHIBÁSODÁS}}} \cdot \underbrace{q}_{\substack{t\text{-EDIK NAPON} \\ \text{VAN MEGHIBÁSODÁS}}}$$

(„PESSZIMISTA" GEO. ELOSZLÁS AZ LENNE, HA AZT SZÁMOLNÁNK, HOGY HÁNY KUDARC VOLT AZ ELSŐ SIKERIG)

$\boxed{3.14}$ ELSŐ FORDULÓ:

$A := \{\text{ANNA NYER}\}$

$B := \{\text{BORI NYER}\}$

$C := \{\text{ELSŐ FORDULÓ DÖNTETLEN}\}$

A, B, C TELJES ESEMÉNYRENDSZER.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{6} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\text{LEGALÁBB EGY HATOS})}_{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{55}{216} \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{216}$$

a) X „OPTIMISTA" GEO. ELOSZLÁSÚ

$$X \sim GEO(p), \quad p = 1 - \mathbb{P}(C) = \frac{91}{216}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{216}{91}$$

---

b) $$\mathbb{P}(\text{ANNA GYŐZ}) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{ANNA A } r\text{-ADIK} \\ \text{KÖRBEN GYŐZ}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(C)^{r-1} \cdot \mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A) \cdot \frac{1}{1-\mathbb{P}(C)}}_{} = \frac{36}{91}$$

<u>MEGJ</u>: $$\mathbb{P}(\text{ANNA GYŐZ}) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} =$$

$= \mathbb{P}(A \mid A \cup B) =$ ANNAK A VAL.SÉGE, HOGY ANNA GYŐZ, FELTÉVE, HOGY AZ ELSŐ KÖRBEN GYŐZ VALAKI