TÉTEL (POISSON-OK ÖSSZEGZÉSE):

HA $X \sim POI(\lambda)$, $Y \sim POI(\mu)$, TOVÁBBÁ

X ÉS Y FÜGGETLENEK (AZAZ: MINDEN $k, \ell \in \mathbb{N}$-RE $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y=\ell)$),

ÉS $Z = X + Y$, AKKOR $Z \sim POI(\lambda + \mu)$

HEURISZTIKUS BIZ: LEGYEN p KICSI.

$$\left.\begin{array}{l} X_n \sim BIN(n, p), \text{ AHOL } n = \lfloor \lambda / p \rfloor \\ Y_m \sim BIN(m, p), \text{ AHOL } m = \lfloor \mu / p \rfloor \end{array}\right\} \begin{array}{c} X_n, Y_m \\ \text{LEGYENEK} \\ \text{FÜGGETLENEK} \end{array}$$

HA $Z_{nm} := X_n + Y_m$, AKKOR $Z_{nm} \sim BIN(n+m, p)$

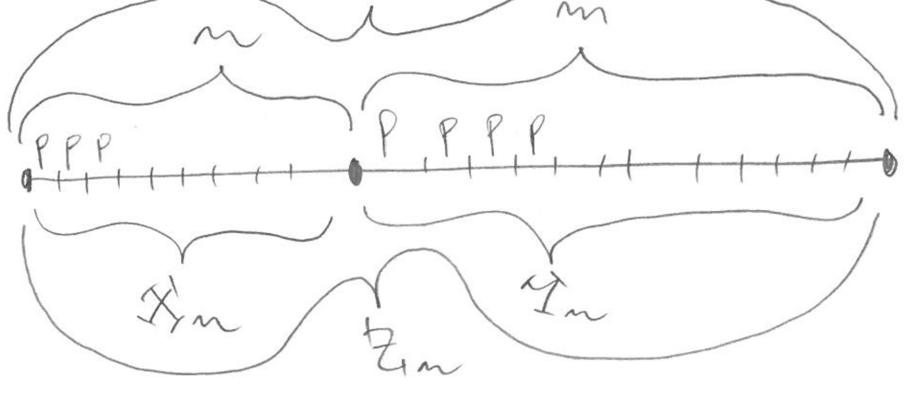
HISZEN ÖSSZESEN $n+m$ FÜGGETLEN KISÉRLETET VÉGZÜNK (MINDEGYIK p VAL.SÉGGEL SIKERES) ÉS Z_{nm} A SIKERES KÍSÉRLETEK SZÁMA.

n NAGY, m NAGY, $n+m$ NAGY

$X_n \sim POI(n \cdot p) \approx POI(\lambda)$

$Y_m \sim POI(m \cdot p) \approx POI(\mu)$

$Z_{nm} \sim POI((n+m) \cdot p) \approx POI(\lambda + \mu)$



TÉTEL: (POISSON RITKÍTÁSA):

HA $X \sim POI(\lambda)$, VAN X DARAB RÉSZECSKE ÉS MINDEGYIK RÉSZECSKE A TÖBBITŐL FÜGGETLENÜL q VALÓSZÍNŰSÉGGEL TÚLÉL, AKKOR A TÚLÉLŐ RÉSZECSKÉK SZÁMA:

$Y \sim POI(q \cdot \lambda)$

HEURISZTIKUS BIZ: $X_m \sim BIN(m, p)$ $\boxed{\begin{matrix} m \text{ NAGY} \\ m \cdot p = \lambda \end{matrix}}$

m FÜGGETLEN KÍSÉRLET, MINDEGYIK p VAL.-SÉGGEL PRODUKÁL EGY RÉSZECSKÉT.

KOMBINÁLVA EZT A TÚLÉLÉSSEL:

m FÜGGETLEN KOMBINÁLT KÍSÉRLET, MINDEGYIK $p \cdot q$ VALSÉGGEL PRODUKÁL EGY TÚLÉLŐ RÉSZECSKÉT.

TÚLÉLŐ RÉSZECSKÉK SZÁMA:

$Y_m \sim BIN(m, p \cdot q) \sim POI(m \cdot p \cdot q) = POI(\lambda \cdot q)$

TÉTEL: (POISSON SZÍNEZÉSE):

HA $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$, VAN X DARAB RÉSZECSKE ÉS MINDEGYIK RÉSZECSKE A TÖBBITŐL FÜGGETLENÜL q VALÓSZÍNŰSÉGGEL PIROS ÉS AMÚGY (AZAZ $1-q$ VAL.SÉGGEL) KÉK,

$Y :=$ PIROS RÉSZECSKÉK SZÁMA

$Z_1 :=$ KÉK —"— —"—

AKKOR $Y \sim \mathrm{POI}(\lambda \cdot q)$, $Z_1 \sim \mathrm{POI}(\lambda \cdot (1-q))$

TOVÁBBÁ Y ÉS Z_1 FÜGGETLENEK.

BIZ: ELÉG BELÁTNI, HOGY $\forall k, l \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\mathbb{P}(Y=k, Z_1=l)}_{\underbrace{\mathbb{P}(X=k+l)}_{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}} \cdot \underbrace{\binom{k+l}{l}}_{\frac{(k+l)!}{k!\,l!}} \cdot q^k \cdot (1-q)^l} = \underbrace{\left(e^{-\lambda \cdot q} \cdot \frac{(\lambda \cdot q)^k}{k!}\right) \cdot \left(e^{-\lambda(1-q)} \cdot \frac{(\lambda \cdot (1-q))^l}{l!}\right)}_{=}$$

VALÓBAN

MEGJ: AZ IMÉNT BIZONYÍTOTT „SZÍNEZÉS" TÉTELBŐL TRIVI MÓDON KÖVETKEZIK AZ „ÖSSZEGZÉS" ÉS „RITKÍTÁS" TÉTEL IS.

$\boxed{5.6}$ EGY 10 KM-ES TÚRÁN ÁTLAGOSAN ÖTSZÖR ÜTI BE VALAMIJÉT.

EGY X KM-ES TÚRÁN ÁTLAGOSAN $\frac{X}{2}$-SZÖR ÜTI BE VALAMIJÉT.

$Y_X :=$ X KM-ES TÚRÁN A BEÜTÉSEK SZÁMA

$Y_X \sim POI\left(\frac{X}{2}\right)$ KELL: $\underbrace{\mathbb{P}(Y_X = 0)}_{e^{-X/2}} = \frac{2}{3}$

$-\frac{X}{2} = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow X = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.81$

TEHÁT 810 MÉTERES TÚRÁRA MENET MÓRICKA

<u>MEGJ</u>: HA A TÚRAÚTVONALON MINDENHOVA TESZÜNK EGY PONTOT, AHOL BEÜTÖTTE VALAMIJÉT, AKKOR A PONTOK EGY $\frac{1}{2}$ PÖTTY/KILÓMÉTER INTENZITÁSÚ HOMOGÉN POISSON PONTFOLYAMATOT ALKOTNAK.

$\boxed{5.9}$ RITKÍTÁS. $X' :=$ FELFEDEZETT LELŐHELYEK SZÁMA

$X' \sim POI(10/50) = POI(1/5)$

a) $\mathbb{P}(X' = 1) = e^{-1/5} \cdot \frac{1}{5}$ b) $\mathbb{P}(X' \geq 1) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X' = 0)}_{e^{-1/5}}$

c) $\mathbb{P}(X' \leq 1) = \underbrace{\mathbb{P}(X' = 0)}_{e^{-1/5}} + \underbrace{\mathbb{P}(X' = 1)}_{e^{-1/5} \cdot \frac{1}{5}}$

$\boxed{5.10}$ INKÁBB LEGYEN A FATÖRZSEK ÁTMÉRŐJE NULLA ÉS AZ ÁGYÚGOLYÓ 20 CM ÁTMÉRŐJŰ.

$120 \cdot \frac{1}{5} = 24\ m^2$ -ES SÍKIDOM FELETT REPÜL EL A GOLYÓ. $24 m^2$-EN ÁTLAGOSAN

$24 \cdot \frac{16}{100} = 3.84$ FA VAN.

$X :=$ FÁK SZÁMA EZEN A $24 m^2$-ES TÉRRÉSZEN

$X \sim POI(3.84)$ $\mathbb{P}$(ELTALÁLUNK EGY FÁT) $=$

$= 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-3.84}$

<u>MEGJ.</u>: A FÁK EGY 0.16 FA/m^2 INTENZITÁSÚ SÍKBELI HOMOGÉN POISSON PONTFOLYAMATOT ALKOTNAK.

$\boxed{5.8}$ A MOGYORÓ ÉS MAZSOLA SZÁMA FÜGGETLEN.

a) EGY KOCKA CSOKIBAN $POI(\lambda)$ DARAB MOGYORÓ.

$e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \ln(2)$.

POISSON-OK ÖSSZEGZÉSE: EGY TÁBLA CSOKIBAN LEVŐ MOGYORÓK SZÁMA: $POI(15 \cdot \ln(2))$

b) ÁTLAGOSAN 30 MAZSOLA TÁBLÁNKÉNT:
— " — 2 — " — KOCKÁNKÉNT

2 KOCKÁBAN $POI(4)$ MAZS, $POI(2 \cdot \ln(2))$ MOGY

TEHÁT...

TEHÁT POISSON-OK ÖSSZEGZÉSE MIATT:

2 KOCKÁBAN MOGY ÉS MAZS ÖSSZESEN: X'

$$X' \sim POI\left(4 + 2\cdot \ln(2)\right) = POI(\mu)$$

$$\mathbb{P}(X' \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X' = 0) - \mathbb{P}(X' = 1) = 1 - e^{-\mu}\cdot(1+\mu)$$

$\boxed{5.14}$ $X :=$ ELSŐ ⚅ HÁNYADIKRA SIKERÜLT

$Y :=$ MÁSODIK ⚅ — " — — " —

$$\mathbb{P}(X = k \mid Y = n) = ? \quad \text{AHOL } 0 < k < n$$

$$\frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n)}{\mathbb{P}(Y = n)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{1}{6}}{\sum\limits_{k^*=1}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k^*-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k^*-1}\cdot\frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}}{(n-1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}} = \frac{1}{n-1}$$

TEHÁT HA $Y = n$, AKKOR X EGYENLETES ELOSZLÁSÚ AZ $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ HALMAZON.

TEHÁT BÁRMIT TIPPEL BÉLA AZ $1, 2, \ldots, n-1$ SZÁMOK KÖZÜL, UGYANÚGY $\frac{1}{n-1}$ VALÓSZÍNŰSÉGGEL NYER.

<u>MEGJ.</u>: Y NEGATÍV BINOMIÁLIS ELOSZLÁSÚ (KÉT FÜGGETLEN $GEO\left(\frac{1}{6}\right)$ ÖSSZEGE)

5.16 „COUPON COLLECTOR'S PROBLEM"

VAN HATFÉLE KUPON, ÉS MINDEGYIK FAJTÁBÓL SZERETNÉNK EGYET. HA k-AST DOBUNK, AKKOR KAPUNK EGYET A k-AS KUPONBÓL ($k=1,\dots,6$).

HA MÁR ÖSSZEGYŰJTÖTTÜN m-FÉLE KUPONT, AKKOR JELÖLJE Y_m AZON KOCKADOBÁSOK SZÁMÁT, AMI AHHOZ KELL, HOGY EGY ÚJABB FAJTA KUPONHOZ JUSSAK.

KELL: $\mathbb{E}(Y_0 + Y_1 + \dots + Y_5) = ?$

$$Y_m \sim GEO\left(\frac{6-m}{6}\right) \quad \text{(OPTIMISTA GEO)}$$

HISZEN HA MÁR m-FÉLÉT LÁTTAM, AKKOR $(6-m)$-FÉLE LEHETSÉGES ÚJ KUPON VAN MÉG ÉS $\frac{6-m}{6}$ A VAL.SÉGE, HOGY ÚJ FAJTA JÖN KI.

$$\mathbb{E}(Y_m) = \frac{6}{6-m}$$

$$? = \mathbb{E}(Y_0) + \dots + \mathbb{E}(Y_5) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right)$$

VÁRHATÓ ÉRTÉK LINEARITÁSA

$\boxed{5.17}$ $p :=$ SIKERES HÚZÁS (4-BŐL 2 PIROS, 2 KÉK)

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}$$

← 4 PIROSBÓL 2-T, 4 KÉKBŐL 2-T

← 8 SZÁMOZOTT GOLYÓBÓL 4-ET HÚZUNK

$X :=$ HÚZÁSOK SZÁMA AZ ELSŐ SIKERIG

$X \sim GEO(p)$ (OPTIMISTA)

$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}$(n-SZER HÚZUNK) $= (1-p)^{n-1} \cdot p$

<u>MEGJ</u>: ~~HA~~ VAN 8 GOLYÓ, 4 PIROS, 4 KÉK ÉS 4-ET HÚZOK VISSZATEVÉS NÉLKÜL, AKKOR A KIHÚZOTT PIROS GOLYÓK SZÁMA <u>HIPERGEOMETRIKUS</u> ELOSZLÁSÚ.