STANDARD NORMÁLIS ELOSZLÁS: $X \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\,ds, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

HA $Y = \mu + \sigma \cdot X$, AKKOR $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(Y) = \mu, \quad Var(Y) = \sigma^2$$

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma \cdot X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

---

$\boxed{7.1}$ $Y \sim N(100, 15^2)$, $X := \frac{1}{15} \cdot (Y - 100) \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(95 \leq Y \leq 110) = \mathbb{P}(-5 \leq Y - 100 \leq 10) =$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{2}{3}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq -\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ELOSZLÁS-TÁBLÁZAT}}}{=} 0.7486 + 0.6293 - 1 = 0.378$$

TEHÁT KB. 38%-NAK VAN 95 ÉS 110 KÖZT AZ IQ-JA.

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(100 - x \leq Y \leq 100 + x) = \mathbb{P}(-x \leq Y - 100 \leq x) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{x}{15} \leq X \leq \frac{x}{15}\right) = \Phi\left(\frac{x}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{15}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{15}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{15}\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{15}\right) - 1$$

TEHÁT: $\Phi\left(\frac{x}{15}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$, $\Phi^{-1}(0.75) \approx 0.68$

TEHÁT $\frac{x}{15} = 0.68$ (TÁBLÁZAT ALAPJÁN)

TEHÁT $\boxed{x = 10.2}$ TEHÁT A 100 KÖRÜLI

10.2 SUGARÚ INTERVALLUMBAN VAN AZ EMBERISÉG 50%-ÁNAK IQ-JA.

---

$$\mathbb{P}(Y \geq 125) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1.66) = 1 - 0.9515 = 0.0485$$

TEHÁT EGY 2500 FŐS TELEPÜLÉSEN VÁRHATÓAN $2500 \cdot 0.0485 = 121$ EMBERNEK LESZ 125 FELETT AZ IQ-JA.

$\boxed{7.2}$ $\mathbb{Y} \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$, $\mathbb{X} := \frac{\mathbb{Y} - 100}{15} \sim \mathcal{N}(0,1)$

ALACSONY IQ:

$$0.2 = \mathbb{P}(\mathbb{Y} \leq x) = \mathbb{P}\left(\mathbb{X} \leq \frac{x-100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{x-100}{15}\right)$$

$\Phi(0.84) = 0.7995 \approx 0.8$, TEHÁT

$\Phi(-0.84) \approx 1 - 0.8 = 0.2$, TEHÁT $\frac{x-100}{15} = -0.84$

TEHÁT ALACSONY IQ FELSŐ HATÁRA: $\boxed{x = 87.4}$

MAGAS IQ:

$$0.15 = \mathbb{P}(\mathbb{Y} \geq y) = 1 - \Phi\left(\frac{y-100}{15}\right)$$, AZAZ

$\Phi\left(\frac{y-100}{15}\right) = 0.85$, TEHÁT $\frac{y-100}{15} = 1.036$

ÍGY MAGAS IQ ALSÓ HATÁRA: $\boxed{y = 115.54}$

$\boxed{7.9}$ FRANCIA KÁRTYA: $4 \times 13 = 52$ LAP

SZÍN — MAGASSÁG

PÓKERLEOSZTÁS: 5 KÁRTYÁT KAPOK

FULL: 3 LAPOM MAGASSÁGA UGYANAZ, ÉS A MARADÉK KÉT LAP MAGASSÁGA UGYANAZ.

PÓKERLEOSZTÁSOK SZÁMA: $\binom{52}{5}$

FULL —"— : $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$

MELYIK MAGASSÁGBÓL LEGYEN 3

MELYIK MAGASSÁGBÓL LEGYEN 2

ABBÓL A MAGASSÁGBÓL MELYIK 3

ABBÓL A MAG.-BÓL MELYIK 2

$$p := \mathbb{P}(\text{FULL}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6}{\binom{52}{6}} = 0.00144 = p$$

$X :=$ SZÁZEZER PÓKER-LEOSZTÁSBÓL A FULLOK SZÁMA

$X \sim BIN(n, p)$, $n = 10^5$, $p = 0.00144$

$\mathbb{P}(128 < X < 158) = ?$ $\quad n \cdot p = 144 \leftarrow$ NAGY

TEHÁT ITT NEM POISSON KÖZELÍTÉST HASZNÁLUNK, HANEM NORMÁLIS KÖZELÍTÉST (DE MOIVRE-LAPLACE)

$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 144$

$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 12 \leftarrow$ SZÓRÁS

$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} =: Y$ KÁBÉ $\mathcal{N}(0,1)$ ELOSZLÁSÚ
$\underbrace{\text{(DE MOIVRE – LAPLACE TÉTEL MIATT)}}$

$\mathbb{P}(128 < X < 158) =$

$\mathbb{P}\left( \frac{128-144}{12} < Y < \frac{158-144}{12} \right) =$

$= \mathbb{P}(-1.33 < Y < 1.16) \approx \Phi(1.16) - \Phi(-1.33)$

$= \Phi(1.16) + \Phi(1.33) - 1 = 0.8776 + 0.9082 - 1$
$= 0.7858$

---

$\boxed{7.11}$ $X_n :=$ DOHÁNYOSOK SZÁMA AZ $n$ MEGKÉRDEZETT KÖZÜL

$X_n \sim BIN(n, p)$ $\boxed{p' := X_n / n}$

$\mathbb{E}(X_n) = n \cdot p$ , $Var(X_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$\underbrace{\mathbb{P}(|p' - p| \le 0.02)}_{\ge 0.93} = \mathbb{P}\left( \left| \frac{X_n}{n} - p \right| \le 0.02 \right) = (\star)$

KELL

$$(\star) = \mathbb{P}\left( |X_n - n\cdot p| \le n\cdot 0.02 \right) =$$

$\boxed{\text{DE MOIVRE LAPLACE}}$

$$= \mathbb{P}\left( \left| \frac{X_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \right| \le \frac{\sqrt{n}\cdot 0.02}{\sqrt{p\cdot(1-p)}} \right) \approx$$

$$\approx \mathbb{P}\left( |Y| \le y \right) =$$

$\boxed{\text{AHOL } Y \sim N(0,1) \text{ ÉS } y = \frac{\sqrt{n}\cdot 0.02}{\sqrt{p\cdot(1-p)}}}$

$$= \mathbb{P}(-y \le Y \le y) = \Phi(y) - \Phi(-y) =$$

$$= \Phi(y) - (1 - \Phi(y)) = 2\cdot\Phi(y) - 1 \ge 0.93$$

KELL

KELL: $\boxed{\Phi(y) \ge 0.965}$

TÁBLÁZATBÓL: $\Phi^{-1}(0.965) = 1.82$

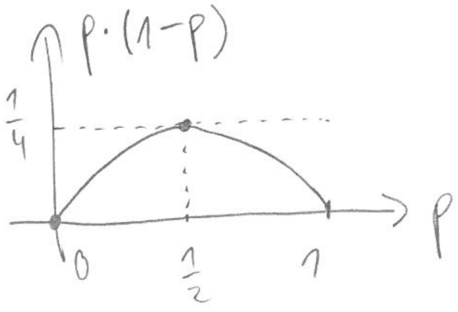
TEHÁT KELL: $\boxed{y \ge 1.82}$ $\boxed{\frac{0.02\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot(1-p)}} \ge 1.82}$

KELL

KELL: $\boxed{n \ge 8281\cdot p\cdot(1-p)}$

MIVEL $p$ ÉRTÉKÉT NEM ISMERJÜK, ÉS BIZTOSRA AKARUNK MENNI, VEGYÜK A LEGROSSZABB ESETET: $\max\limits_{0\le p\le 1} p\cdot(1-p) = \frac{1}{4}$, HISZEN...

HISZEN :




TEHÁT $n \geq 8281 \cdot 0.25 = 2070.25$

TEHÁT KÉRDEZZÜNK MEG 2071 EMBERT ARRÓL, HOGY CIGIZIK-E.

---

$\boxed{7.12}$ $X_n :=$ n EMBERBŐL HÁNY TILTANÁ BE

$X_n \sim BIN(n, 0.42)$

a) $\mathbb{P}\left(\frac{X_{11}}{11} \geq 0.4\right) = \mathbb{P}\left(X_{11} \geq 5\right) =$

$1 - \mathbb{P}\left(X_{11} \leq 4\right) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{11}{k} \cdot (0.42)^k \cdot (0.58)^{11-k} \approx 0.52$

b) $\mathbb{P}\left(\frac{X_{101}}{101} \geq 0.4\right) = \mathbb{P}\left(X_{101} \geq 41\right) \approx 0.649$

DE MOIVRE-LAPLACE

c) $\mathbb{P}\left(\frac{X_{1001}}{101} \geq 0.4\right) \approx 0.899$

KELL

d) $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 0.4\right) \geq 0.95$

$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 0.4\right) = \mathbb{P}\left(X_n \geq 0.4 \cdot n\right) =$

$$☹ = \mathbb{P}\left( \frac{X_n - 0.42 \cdot n}{\sqrt{n \cdot (0.42) \cdot (0.58)}} \geq \frac{-0.02 \cdot n}{\sqrt{n \cdot (0.42) \cdot (0.58)}} \right) \approx$$

DE MOIVRE LAPLACE

$$\approx 1 - \Phi\left(-0.04 \cdot \sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.04 \cdot \sqrt{n}\right) \geq 0.95$$

KELL

TEHÁT: KELL: $0.04 \cdot \sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.65$

TEHÁT $\boxed{n \geq 1701}$ ← ENNYI EMBERT KELL MEGKÉRDEZNI, HA 95% BIZTONSÁGGAL AKARJUK, HOGY A MEGKÉRDEZETTEK LEGALÁBB 40%-A TILTSA BE.

---

$\boxed{7.18}$ $X :=$ VILLANYKÖRTE ÉLETTARTAMA (ÉVBEN)

$X \sim EXP(\lambda)$ $\quad \boxed{\mathbb{P}(X \geq 1) = 0.9}$

$\mathbb{P}(X \geq 1) = e^{-\lambda} = 0.9 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\ln(0.9)}$

$x :=$ GARANCIA IDŐTARTAMA : $\boxed{\mathbb{P}(X \geq x) = 0.99}$

$\mathbb{P}(X \geq x) = e^{-\lambda \cdot x} = e^{\ln(0.9) \cdot x} = (0.9)^x = 0.99$, ÍGY

$x = \frac{\ln(0.99)}{\ln(0.9)} = 0.095$ ÉVRE VÁLLALHAT CSAK GARANCIÁT... (KB EGY HÓNAP)

7.19 a) $X$ = KÖV. METRÓ ÉRK. IDEJE (PERCBEN)

$X \sim EXP(\lambda)$, $\lambda$ = INTENZITÁS

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$, TEHÁT $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

$\mathbb{P}(X \geq 5) = e^{-\lambda \cdot 5} = e^{-2.5} \approx 0.082$

b) <u>ÖRÖKIFJÚ</u> TULAJDONSÁG MIATT

A VÁLASZ ITT IS $e^{-2.5}$ LESZ, DE

AZÉRT SZÁMOLJUK KI:

$$\mathbb{P}(X \geq 3+5 \mid X \geq 3) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq 8\} \cap \{X \geq 3\})}{\mathbb{P}(X \geq 3)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq 8)}{\mathbb{P}(X \geq 3)} = \frac{e^{-\lambda \cdot 8}}{e^{-\lambda \cdot 3}} = e^{-\lambda \cdot 5} = e^{-2.5}$$

---

7.23 $X$ := HANYADIK ÓRAJELRE FAGY LE

ÓRA-ÜTÉSKOR LEFAGY

$p$ := EGY ADOTT

$\varepsilon$ := KÉT ÓRAJEL KÖZTI IDŐ (ÓRÁBAN)

TUDJUK: $\mathbb{E}(X) \cdot \varepsilon = 1$, $X \sim GEO(p)$, ÍGY $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

ÍGY $\frac{\varepsilon}{p} = 1$, ÍGY $\boxed{\varepsilon = p}$. $\boxed{Y := \varepsilon \cdot X}$ $Y$ A LEFAGYÁS

IDŐPONTJA (ÓRÁBAN MÉRVE), LAPOZZ

9. OLDAL

MI LEHET $\mathbb{Y}$ ELOSZLÁSA? (KÖZELÍTŐLEG)

TUDJUK: $\mathbb{E}(\mathbb{Y}) = 1$.

BELÁTJUK, HOGY HA $\varepsilon$ KICSI, AKKOR

KÁBÉ $\boxed{\mathbb{Y} \sim EXP(1)}$. UGYANIS:

$$\mathbb{P}(\mathbb{Y} \geq y) = \mathbb{P}(\mathbb{X} \cdot \varepsilon \geq y) = \mathbb{P}(\mathbb{X} \geq y/\varepsilon) =$$

$$= \mathbb{P}(\mathbb{X} \geq \lceil y/\varepsilon \rceil) \underset{\boxed{\mathbb{X} \sim GEO(\varepsilon)}}{=} (1-\varepsilon)^{\lceil y/\varepsilon \rceil} \approx (1-\varepsilon)^{y/\varepsilon} = ☺$$

$$☺ = \left((1-\varepsilon)^{1/\varepsilon}\right)^{y} \underset{\boxed{\varepsilon \text{ KICSI}}}{\approx} (e^{-1})^{y} = e^{-y}, \quad \boxed{y \geq 0}$$

UGYANIS:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (1-\varepsilon)^{1/\varepsilon} = A$$

$$\ln(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln\left((1-\varepsilon)^{1/\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \overset{\text{L'HOSPITAL}}{=}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{-1/(1-\varepsilon)}{1} = -1, \text{ TEHÁT } \boxed{A = e^{-1}}$$