$\boxed{9.3}$ **HÉTFŐ:** $Y \sim N(7.30, 3^2)$, $Z_1 \sim N(7.37, 4^2)$

LEKÉSI $\iff Y + 2 > Z_1 \iff Z_1 - Y < 2$

Z_1 ÉS Y FÜGGETLENEK ÉS NORMÁLIS ELOSZLÁSÚAK, ÍGY: HA $X := Z_1 - Y$, AKKOR

$$X \sim N(\underbrace{7}_{\text{VÁRHATÓ ÉRTÉKEK KÜLÖNBSÉGE}}, \underbrace{3^2 + 4^2}_{\text{SZÓRÁSNÉGYZETEK ÖSSZEGE}}) \sim N(7, 5^2)$$

$\boxed{\text{LEKÉSI HÉTFŐN}} \iff \boxed{X < 2}$

$$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{5} < \frac{2-7}{5}\right) = \Phi(-1) =$$

$$= 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 =: p$$

a) LEKÉSÉSEK SZÁMA EGY MUNKAHÉTEN: $BIN(5, p)$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\text{-}''\text{-}}_{\text{LEKÉSÉSEK SZÁMA}} \leq 1) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 + \binom{5}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^4 = 0.819$$

---

b) **HÉTFŐ** VISSZAÚT: $X^* \sim N(9, 5^2)$

$$\mathbb{P}(X^* < 2) = 1 - \Phi(1.4) \approx 0.0808 = p^*$$

ÉVI KÉSÉSEK SZÁMA ODA: $V \sim BIN(220, p)$

—— " —— VISSZA: $V^* \sim BIN(220, p^*)$

DE MOIVRE-LAPLACE:

$$\underbrace{\frac{V-220\cdot p}{\sqrt{220}}}_{W} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{p\cdot(1-p)}_{0.1335}) \qquad \frac{V^*-220\cdot p^*}{\sqrt{220}} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{p^*\cdot(1-p^*)}_{0.0742})$$

KÖZELÍTŐLEG $\qquad W^* \qquad$ KÖZELÍTŐLEG

$\mathbb{P}$(HAZAFELÉ TÖBB ALKALOMMAL KÉSI LE) =

$$\mathbb{P}(V^* > V) = \mathbb{P}\left(V^* - 220p^* > V - 220p + 220(p-p^*)\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(W^* > W + \underbrace{\sqrt{220}\cdot(p-p^*)}\right) =$$

$$\mathbb{P}(W^* - W > 1.155) =$$

$$1 - \Phi\left(\frac{1.155}{0.455}\right) = 0.0057$$

$W^* - W \sim$
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
$\sigma^2 = 0.1335 + 0.0742$
TEHÁT
$\sigma = 0.455$

HA (X, Y) EGYÜTTES SŰ. FV.-E: $f(x,y)$

MARGINÁLIS ELOSZLÁS SŰ. FV.-E: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

FELTÉTELES SŰ. FV.: $\boxed{f_{Y|X}(y|x) = f(x,y)/f_X(x)}$

JELENTÉSE:

$$\mathbb{P}\left(Y \in [y, y+dy] \mid X \in [x, x+dx]\right) =$$

$$\frac{\mathbb{P}\left(X \in [x, x+dx],\ Y \in [y, y+dy]\right)}{\mathbb{P}\left(X \in [x, x+dx]\right)} = \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{f_X(x)\,dx} = f_{Y|X}(y,x)\,dy$$

$\boxed{9.11}$ a) $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 \frac{4}{5}(x + xy + y)\,dy =$

$$= \frac{4}{5}\cdot\left[xy + x\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\cdot\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}\cdot(1+3x)\cdot \mathbb{1}[0 \le x \le 1]$$

$$f_{Y|X}(y|x_0) = \frac{h(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot(x_0 + x_0 y + y)}{\frac{2}{5}\cdot(1+3x_0)} \cdot \mathbb{1}[0 \le y \le 1]$$

---

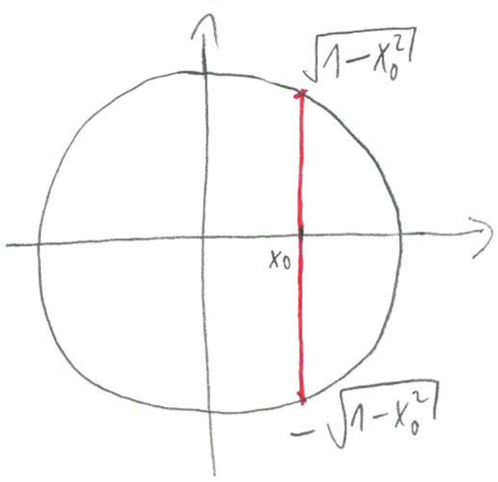
b) LÁSD $\boxed{8.17}$: $f(x,y) = \frac{1}{\pi}\cdot \mathbb{1}[x^2+y^2 \le 1]$

$f_X(x) = \frac{2\cdot\sqrt{1-x^2}}{\pi}\cdot \mathbb{1}[-1 \le x \le 1]$, ÉS HA $x_0 \in (-1,1)$:

$$f_{Y|X}(y|x_0) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{\mathbb{1}[x_0^2 + y^2 \le 1]}{2\cdot\sqrt{1-x_0^2}} =$$

$$= \frac{\mathbb{1}\left[-\sqrt{1-x_0^2} \le y \le \sqrt{1-x_0^2}\right]}{2\cdot\sqrt{1-x_0^2}}$$, TEHÁT

HA $X = x_0$, AKKOR $Y \sim UNI\left[-\sqrt{1-x_0^2}, \sqrt{1+x_0^2}\right]$



AZAZ Y FELTÉTELES ELOSZLÁSA EGYENLETES A $\left[-\sqrt{1-x_0^2}, \sqrt{1+x_0^2}\right]$ INTERVALLUMON.

$\boxed{9.15}$ $X_i := \mathbb{1}[\underbrace{\text{I-EDIK ÉRKEZŐ ÚJ ASZTALHOZ ÜL}}_{A_i}]$

$$\underbrace{\text{ELFOGLALT ASZTALOK SZÁMA}} = X_1 + \ldots + X_N$$

$$\mathbb{E}(-\shortparallel-) \overset{\text{LINEARITÁS}}{=\!=} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{\mathbb{P}(A_i)} = ☆$$

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{AZ ELSŐ } i-1 \text{ VENDÉG KÖZÜL}\\ \text{EGY SEM BARÁTJA } i\text{-NEK}\end{matrix}\right) = (1-p)^{i-1}$$

$$☆ = \sum_{i=1}^{N} (1-p)^{i-1} = \frac{(1-p)^N - 1}{(1-p) - 1} = \frac{1-(1-p)^N}{p}$$

$\boxed{9.18}$ $A_i := \{ \text{I-EDIK FÉRJ A FELESÉGE MELLETT ÜL} \}$

$$X_i := \mathbb{1}[A_i], \quad X = X_1 + \ldots + X_{10}$$

X = AHÁNY FÉRJ ÜLT A FELESÉGE MELLÉ

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(X_i) = 10 \cdot \mathbb{P}(A_1) = \frac{20}{19}$

VÁRHATÓ ÉRTÉK LINEARITÁSA

SZIMMETRIA

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{ELSŐ FÉRJ MELLETTI KÉT}\\ \text{SZÉK EGYIKÉN A FELESÉGE ÜL}\end{matrix}\right) = \frac{2}{19}$$

b) LÁSD 5. OLDAL

$\boxed{9.18}$ (b): $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{\left(\frac{20}{19}\right)^2}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{10} X_i X_j\right) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{10} \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) = \sum_{i,j=1}^{10} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}[A_i]\cdot\mathbb{1}[A_j]\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{10} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}[A_i \cap A_j]\right) = \sum_{i,j=1}^{10} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) =$$

$$= 10 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_1)}_{\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{19}} + 90 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{\text{☹}}$$

Y := AHÁNY SZÉK VAN AZ ELSŐ ÉS MÁSODIK FÉRJ KÖZT

$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{19}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{19}$, $\mathbb{P}(Y \geq 2) = \frac{15}{19}$

TELJES V.SZ. TÉTELE:

$$\text{☹} = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid Y = 0)}_{\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{17}} \cdot \frac{2}{19} + \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid Y = 1)}_{3\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{17}} \cdot \frac{2}{19} + \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid Y \geq 2)}_{\frac{2}{18}\cdot\frac{2}{17}} \cdot \frac{15}{19}$$

$\boxed{9.20}$ COUPON COLLECTOR'S PROBLEM.

(A VÁRHATÓ ÉRTÉKET MÁR $\boxed{5.16}$ -BAN KISZÁMOLTUK)

HA MÁR ÖSSZEGYŰJTÖTTÜNK m-FÉLE KUPONT, AKKOR JELÖLJE Y_m AZON KOCKADOBÁSOK SZÁMÁT, AMI AHHOZ KELL, HOGY EGY ÚJABB FAJTA KUPONHOZ JUSSAK.

Z_1 := SZÜKSÉGES DOBÁSOK SZÁMA, AMÍG AZ ÖSSZES KUPONT ÖSSZEGYŰJTJÜK

$$\boxed{Z_1 = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_5} \qquad Y_m \sim GEO\left(\frac{6-m}{6}\right) \text{ (OPT.)}$$

VEGYÜK ÉSZRE, HOGY $Y_0, Y_1, \dots, Y_5$ <u>FÜGGETLENEK</u>,

ÍGY $$\mathrm{Var}(Z_1) = \sum_{m=1}^{5} \mathrm{Var}(Y_m) = \sum_{m=1}^{5} \frac{1-\frac{6-m}{6}}{\left(\frac{6-m}{6}\right)^2}$$

FÜGGETLENSÉG MIATT

$\boxed{9.1}$ $f(x) = \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot x} \cdot \mathbb{1}[x \geq 0]$ $\quad g(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \cdot x} \cdot \mathbb{1}[x \geq 0]$

$X_1 + X_2$ SŰRŰSÉGFV.-E: $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y)\, dy = \star$

f ÉS g <u>KONVOLÚCIÓJA</u>

$f * g$

$$\text{☆} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot y} \cdot \mathbb{1}[y \geq 0] \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot (x-y)} \cdot \mathbb{1}[x-y \geq 0] \, dy =$$

$$= \int_0^x \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot y} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot (x-y)} \, dy =$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot x} \cdot \int_0^x e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot y} \, dy =$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot x} \cdot \left(\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot x} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{-\lambda_1 \cdot x} - e^{-\lambda_2 \cdot x} \right)$$
