Poisson eloszlás tulajdonságai: összegzés, ritkítás, színezés

Tétel (Poisson-ok összegzése): *Legyen $X \sim POI(\lambda)$ és $Y \sim POI(\mu)$, továbbá legyenek X és Y függetlenek (azaz $\forall\, k, \ell \in \mathbb{N}$-re $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$). Legyen $Z = X + Y$. Ekkor $Z \sim POI(\lambda + \mu)$.*

Biz (heurisztikus): Legyen $p \in (0, 1)$ kicsi és legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy

$$np \approx \lambda, \qquad mp \approx \mu.$$

Legyen $X^* \sim BIN(n, p)$ és $Y^* \sim BIN(m, p)$, legyenek X^* és Y^* függetlenek.

Legyen $Z^* = X^* + Y^*$. Ekkor $Z^* \sim BIN(n + m, p)$, hiszen összesen $n + m$ független kísérletet végzünk (mindegyik p valószínűséggel sikeres) és Z^* a sikeres kísérletek száma.

Lévén, hogy n nagy, m nagy, $n+m$ nagy, p kicsi, és $np \approx \lambda$, $mp \approx \mu$ és $(n+m)p \approx \lambda+\mu$, így mindhárom esetben alkalmazhatjuk a binomiális eloszlás Poisson közelítését:

$$X^* \sim POI(\lambda), \quad Y^* \sim POI(\mu), \quad X^* + Y^* = Z^* \sim POI(\lambda + \mu).$$

Tétel (Poisson ritkítása): *Legyen $Z \sim POI(\nu)$. Ha van Z darab részecske és mindegyik részecske a többitől függetlenül q valószínűséggel túlél (egyébként pedig meghal), akkor a túlélő részecskék száma $X \sim POI(q\nu)$.*

Biz (heurisztikus): Legyen $Z^* \sim BIN(n, p)$, ahol p kicsi, n nagy és $np = \nu$.

Végezzünk n független kísérletet, mindegyik p valószínűséggel produkál egy részecskét.

Részecskék száma: $Z^* \sim BIN(n, p)$. Kombináljuk ezt a túléléssel: n független kombinált kísérletet, mindegyik pq valószínűséggel produkál egy túlélő részecskét.

Túlélő részecskék száma: $X^* \sim BIN(n, pq)$.

Poisson közelítés után: $Z^* \sim POI(np) \sim POI(\nu)$ és $X^* \sim POI(npq) \sim POI(q\nu)$.

Tétel (Poisson színezése): *Ha $Z \sim POI(\nu)$ és ha van Z darab részecske, mindegyik részecske a többitől függetlenül q valószínűséggel piros és amúgy (azaz $1-q$ valószínűséggel) kék, és X a piros részecskék száma, Y a kék részecskék száma, akkor $X \sim POI(q\nu)$, $Y \sim POI((1-q)\nu)$, továbbá X és Y val.változók FÜGGETLENEK.*

Biz (precíz): Elég belátni, hogy tetszőleges $k, \ell \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \left(e^{-q\nu}\frac{(q\nu)^k}{k!}\right) \cdot \left(e^{-(1-q)\nu}\frac{((1-q)\nu)^\ell}{\ell!}\right).$$

És valóban: ahhoz, hogy $\{X = k, Y = \ell\}$ bekövetkezzen, szükséges, hogy $Z = k + \ell$ legyen (ennek valószínűsége $e^{-\nu}\frac{\nu^{k+\ell}}{(k+\ell)!}$), és ha feltesszük, hogy $k+\ell$ részecskénk van összesen, akkor $\binom{k+\ell}{\ell}q^k(1-q)^\ell$ annak valószínűsége, hogy pont k lesz közülük piros és ℓ lesz kék, így

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = e^{-\nu}\frac{\nu^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \cdot \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}q^k(1-q)^\ell = e^{-q\nu}\frac{(q\nu)^k}{k!} \cdot e^{-(1-q)\nu}\frac{((1-q)\nu)^\ell}{\ell!}.$$

Megj: A *színezés tételből* trivi módon következik az *összegzés tétel* bizonyítása ($\nu = \lambda+\mu$, $q = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ választással) és a *ritkítás tétel* bizonyítása is (ha a pirosak a túlélők).