NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2021. dec. 21.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(4 pont)* Definiálja a p paraméterű geometriai eloszlást, az örökifjú tulajdonságot és bizonyítsa be, hogy a geometriai eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal!

(b) *(5 pont)* Számítsa ki a geometriai eloszlás várható értékét!

(c) *(5 pont)* Legyenek X és Y független $\mathrm{GEO}(p)$ eloszlású valószínűségi változók. Számítsa ki a $\mathbb{P}(X = 5 \,|\, X + Y = 13)$ feltételes valószínűséget.

Elm. 2. (a) *(4 pont)* Legyen az (X, Z) val.változó pár együttesen abszolút folytonos, jelölje az együttes sűrűségfüggvényüket $f(x, z)$. Definiálja a következő fogalmakat (azaz írja fel a képletüket f segítségével): Z peremeloszlás f_Z sűrűségfüggvénye, X feltételes $f_{X|Z}$ sűrűségfüggvénye $Z = z$ ismeretében, X feltételes várható értéke $Z = z$ ismeretében.

(b) *(10 pont)* Egy rádióantenna által kiadott X jel egy $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó. A vevő által fogadott Z jel úgy keletkezik, hogy az antenna által kiadott X jelhez hozzáadódik egy X-től független Y zaj, amely $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású. Határozza meg X feltételes sűrűségfüggvényét a $Z = z$ feltétel mellett, továbbá írja fel X feltételes várható értékét a $Z = z$ feltétel mellett.

Elm. 3. Legyen az X val.változó abszolút folytonos, jelölje az eloszlásfüggvényét F, sűrűségfüggvényét f.

(a) *(2 pont)* Ha ismerem F-et, hogyan kapom meg f-et? Ha ismerem f-et, hogyan kapom meg F-et?

(b) *(5 pont)* Legyen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, szigorú monoton növő bijekció. Legyen $Y = \psi(X)$. Írja fel és vezesse le az Y valószínűségi változó G eloszlásfüggvényét és g sűrűségfüggvényét F, f és ψ segítségével kifejező képleteket.

(c) *(5 pont)* Határozza meg $Y := 1 - 2X$ val.változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét. *Vigyázat:* a $\psi(x) = 1 - 2x$ függvény monoton csökkenő!

Gyak. 1. *(20 pont)* Egy városban kétféle taxitársaság működik, egyikük fehér, másikuk sárga színű kocsikkal szállít. A városban a fehér taxik aránya 15%, míg a sárgáké 85%. Egy balesetnek, melyet egy taxis okozott, egyetlen szemtanúja volt. Az ő állítása szerint a vétkes taxis fehér kocsiban ült. A rendőrségi vizsgálat azt is kimutatta, hogy a tanú megbízhatósága 80%-os, vagyis hasonló körülmények között az esetek 80%-ában állapítja meg helyesen a taxi színét. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a vétkes taxis fehér autót vezetett. **Bónusz:** *(10 pont)* Feltűnik egy új, az elsőtől független, úgyszintén 80%-os megbízhatóságú tanú, aki megerősíti az első tanú vallomását. Most mekkora a valószínűsége annak, hogy a vétkes taxis fehér autót vezetett?

Gyak. 2. *(20 pont)* Két közvéleménykutató cég (Századelő, Perspektíva) próbálja megbecsülni a „Szeretem a hazám” párt támogatottságát. A párt tényleges támogatottsága 30%, de ezt a közvélemény-kutatók nem tudják. A Századelő 1000 embert kérdezett meg, a Perspektíva 1500 embert. Mindkét cég egyenletes eloszlással, visszatevéssel választ mintát a választópolgárok közül, és a saját mintáján vett mintaátlag segítségével becsüli a párt támogatottságát. Körülbelül mekkora annak a valószínűsége, hogy a Századelő becslése esik közelebb a párt tényleges támogatottságához? *Súgás:* Használjon 2-dimenziós normális közelítést!

Gyak. 3. *(20 pont)* A rulettkeréken 37 mező van, 0-tól 36-ig számozva. Xavér mindig arra fogad, hogy az eredmény 19 vagy annál nagyobb szám, Yvett mindig arra, hogy az eredmény 3-mal való osztás szerinti maradéka 1 (tehát az $\{1; 4; 7; ...; 34\}$ számok valamelyike). Tekintsünk 20 független pörgetést; jelölje X, illetve Y, hogy ennek során hányszor nyer Xavér, illetve Yvett. (Az is lehet, hogy egy pörgetésnél mindketten nyernek, és az is, hogy egyikük sem.) Számoljuk ki X és Y korrelációs együtthatóját.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000