NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2022. jan. 14.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható.
Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(8 pont)* Definiálja a $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ eloszlást és számítsa ki a várható értékét és szórásnégyzetét!

(b) *(7 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a binomiális eloszlás Poisson közelítésére vonatkozó tételt! *Instrukció:* a bizonyítás egy határérték-számítási feladat: írja le a számolást olyan részletességgel, hogy látszódjon, hogy a tétel feltételeit hányszor és hol használta!

Elm. 2. (a) *(3 pont)* Legyen az (X, Y) valószínűségi változó-pár együttesen abszolút folytonos eloszlású, és jelölje az együttes sűrűségfüggvényüket $f(x, y)$. Az f együttes sűrűségfüggvény milyen tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy X és Y függetlenek?

(b) *(7 pont)* Legyenek X és Y független valószínűségi változók, jelölje X sűrűségfüggvényét $g(x)$, Y sűrűségfüggvényét $h(x)$. Számítsa ki $X + Y$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Instrukció: a válaszait fejezze ki g és h segítségével!

(c) *(10 pont)* Legyen $f(x, y) = C \cdot e^{-(x+y/2)}\mathbb{1}[x > 0, y > 0]$. $C = ?$, $\mathbb{P}(2X < Y) = ?$

Elm. 3. (a) *(5 pont)* Legyenek X és Y val.változók ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezve. Definiálja X és Y kovarianciáját. Bizonyítsa be, hogy független val. változók kovariancája nulla. *Instrukció:* biz. nélkül használhatja a függelen val.változók szorzatának várható értékéről tanultakat.

(b) *(5 pont)* Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ val. változók ugyanazon a val. mezőn értelmezve. Definiálja az $(X_1, \ldots, X_n)$ véletlen vektor $\underline{\underline{C}}$ kovarianciamátrixát, és lássa be, hogy $\underline{\underline{C}}$ pozitív szemidefinit.

(c) *(5 pont)* Definiálja az X és Y valószínűségi változók korrelációs együtthatóját és lássa be a 2×2-es pozitív szemidefinit mátrixok ismert tulajdonságainak felhasználásával, hogy X és Y korrelációs együtthatója -1 és 1 közt van.

Gyak. 1. *(15 pont)* Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha X a dobott számok maximuma, Y pedig a két dobott érték összege.

Gyak. 2. *(15 pont)* Egy új urán-lelőhelyet próbálok felmérni a Geiger-Müller-számlálómmal. Azt eleve tudom, hogy számláló ketyegéseinek másodpercenkénti átlagos μ száma 2 és 3 közt van, de ennél pontosabb értéket szeretnék kimérni, így $T \in \mathbb{N}$ másodpercig figyelem a számlálómat, és a ketyegések számának ezen időintervallumon vett $\overline{\mu}$ tapasztalati átlagával becsülöm μ értékét. Adjon becslést arra, hogy mekkorának válasszam $T \in \mathbb{N}$ értékét, ha 95% valószínűséggel szeretném garantálni, hogy $\overline{\mu}$ és μ eltérése legfeljebb 0.02 legyen! *Instrukció:* ha valamilyen modellezési feltevéssel él vagy valamilyen közelítést használ, írjon rövid indoklást! Eloszlás-táblázat a túloldalon.

Gyak. 3. Legyen $a \in \mathbb{R}_+$. Az X és Y valószínűségi változók együttesen abszolút folytonos eloszlásúak, Y peremsűrűség-függvénye $f_Y(y) = a^2 y e^{-ay}\mathbb{1}[y \geq 0]$, X feltételes eloszlása Y rögzítése mellett pedig egyenletes a $[0, Y]$ intervallumon. Határozzuk meg (a) *(3 pont)* az együttes sűrűségfüggvényt, (b) *(5 pont)* X peremsűrűség-függvényét és $\mathbb{E}(X)$-t, (c) *(6 pont)* $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ és $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ értékét, (d) *(6 pont)* $\mathbb{E}(Y)$-t az előző részfeladat eredménye és a toronyszabály felhasználásával.

Bónusz: *(10 pont)* Számolja ki Y szórásnégyzetét további integrálás nélkül, a feltételes szórásnégyzet formula segítségével! *Emlékeztetőül:* ha $Z \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Info: Integrálással megoldva a (d), ill. a bónusz feladat max pontszáma *(4 pont)*, ill. *(7 pont)*.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000