NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2022. dec. 20.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%-os eredménynek számít.

Elm. 1. (a) *(2 pont)* Definiálja egy E esemény egy F eseményre vett feltételes valószínűségét!

(b) *(2 pont)* Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!

(c) *(4 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a teljes valószínűség tételét!

(d) *(4 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be Bayes tételét!

Elm. 2. (a) *(5 pont)* Legyen $X \sim \text{BIN}(n_1, p)$ és $Y \sim \text{BIN}(n_2, p)$ függetlenek. Milyen eloszlású $X + Y$? Válaszát igazolja.

(b) *(7 pont)* Vezesse le az n, p paraméterű binomiális eloszlás várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó képleteket valamelyik tanult módszerrel. Részletezze a levezetés lépéseit.

(c) *(8 pont)* Legyen $U \sim \text{BIN}(n, 1/2)$ és $V \sim \text{BIN}(n, 2/3)$ függetlenek, továbbá legyen n nagyon nagy. Számolja ki a $\mathbb{P}(4U - 3V \geq \sqrt{n})$ valószínűséget három tizedesjegy pontossággal.

Elm. 3. (a) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Markov egyenlőtlenséget!

(b) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Csebisev egyenlőtlenséget!

(c) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Nagy Számok Gyenge Törvényét!

Gyak. 1. A Kossuth téri óriás karácsonyfán sok piros és sok fehér égő van. Hetente átlagosan két piros égő ég ki és hetente átlagosan egy fehér égő ég ki. A Parlament pedellusa minden nap reggel 8-kor ellenőrzi és cseréli a kiégett égőket.

(a) *(5 pont)* Mekkora valószínűséggel fog vasárnap reggel 8-tól szerda reggel 8-ig összesen legalább két égő kiégni?

(b) *(5 pont)* Most cserélt égőt a pedellus. Várhatóan hány óra múlva ég ki a következő égő?

(c) *(7 pont)* Most cserélt égőt a pedellus. Várhatóan hány óra múlva cserél újra égőt?

Gyak. 2. (a) *(4 pont)* Jelölje X egy szabályos kockadobás eredményét. Számoljuk ki X várható értékét és szórását.

(b) *(9 pont)* András és Béla a következő játékot játsszák: feldobnak négy szabályos dobókockát: a négy dobás eredményét jelölje rendre X_1, X_2, X_3 és X_4. Béla fizet Andrásnak $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ forintot, András pedig Bélának $(X_1 + X_2 - X_3 - X_4)^2$ forintot. Melyiküknek kedvez a játék?

Gyak. 3. Legyenek (X, Y) együttesen normális eloszlású, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, kovariancia-mátrixuk $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) *(10 pont)* Legyen $Z = \alpha X + \beta Y$. Hogyan válasszuk meg az $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ együtthatókat, ha azt szeretnénk, hogy Z az X-től független és $\mathcal{N}(0, 2)$ eloszlású legyen?

(b) *(10 pont)* Számolja ki $\mathbb{P}(|X| + |Z| < 1)$ értékét (ahol X és Z együttes eloszlása az előző részfeladatban lett definiálva).

Bónusz: *(10 pont)* Számolja ki $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0)$ értékét a fentebb definiált (X, Y) esetén. *Súgás:* Használja Z-t!

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000