NÉV: ............................................................ NEPTUN-KÓD: .................................... SZAK: .................

**Valószínűségszámítás vizsga, 2023. jan. 10.**

*Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.*

*Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is* $100\%$*-os eredménynek számít.*

**Elm. 1.** Legyen $X$ Poisson eloszlású $\lambda$ paraméterrel.

(a) *(7 pont)* Írja fel $X$ valószínűségi súlyfüggvényét. Számolja ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathrm{Var}(X)$ értékét.

(b) *(8 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a binomiális eloszlás Poisson közelítésére vonatkozó tételt.

(c) *(4 pont)* Van egy dobozunk, benne sok villanykörte, amelyek egymástól függetlenül hibásak kis valószínűséggel. Tegyük fel, hogy $2/3$ annak a valószínűsége, hogy van legalább egy hibás villanykörte a dobozban. Mekkora valószínűséggel lesz legfeljebb két hibás körte a dobozban?

**Elm. 2.** Legyenek $X$ és $Y$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn definiálva.

(a) *(4 pont)* Defininálja $X$ és $Y$ kovarianciáját, és lássa be, hogy a kovariancia bilineáris. Nevezze meg a várható érték azon tulajdonságait, amelyeket a bizonyítás közben felhasznált.

(b) *(2 pont)* Lássa be, hogy ha $X$ és $Y$ függetlenek, akkor a kovarianciájuk nulla. Nevezze meg a várható érték azon tulajdonságait, amelyeket a bizonyítás közben felhasznált.

(c) *(7 pont)* Igaz-e, hogy ha $X$ és $Y$ kovarianciája nulla, akkor függetlenek? Ha igaz, bizonyítsa, ha nem, adjon ellenpéldát.

**Elm. 3.** (a) *(9 pont)* Számítsa ki a standard normális eloszlás momentumgeneráló függvényét.

(b) *(9 pont)* Legyenek $X_1, X_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_i) = 0$ és $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Jelölje $M(t)$ az $X_i$ val.változó momentumgeneráló függvényét és tegyük fel, hogy $M(t) < +\infty$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Lássa be, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \le x) = \Phi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\Phi$ jelöli $\mathcal{N}(0,1)$ eloszlásfüggvényét. Nevezze meg, hogy a mom.gen. függvények milyen tulajdonságait használta.

**Gyak. 1.** *(20 pont)* Anasztázia és Brunhilda tea-válogatásokat ajándékoznak egymásnak Advent kezdetekor. Mindkét válogatás 24 teafiltert tartalmaz, melyeket egymás tetejére téve tesznek az ajándékdobozba. A hölgyek egymástól függetlenül és jól megkeverve tették a teafiltereket a dobozokba. Mindkét dobozban nyolc fekete és hat zöld teafilter van, a többi gyümölcsös. Advent minden napján mind a ketten egy teát isznak, a legfelső teafiltert véve ki a dobozaikból.

Jelölje $X$ azon napok számát, amikor mind a ketten fekete teát isznak. Mennyi $\mathbb{E}(X)$ és $\mathrm{Var}(X)$?

**Bónusz:** *(10 pont)* Mekkora a val.séggel nem lesz olyan nap, amikor mindketten zöld teát isznak? *Instrukció:* A bónusz feladat válaszát nem kell numerikusan kiszámolni, elég egy szumma.

**Gyak. 2.** A 3 egység hosszú $PQ$ szakaszt kettétörjük az egyenletes eloszlással választott $R$ pontban. Jelölje a $PR$ szakasz hosszát $X$. Ezek után a megmaradó, $3 - X$ egység hosszú $RQ$ szakasz mentén kiválasztunk egyenletes eloszlással egy $S$ töréspontot. Jelölje az $RS$ szakasz hosszát $Y$.

(a) *(7 pont)* Írjuk fel az $(X, Y)$ pár közös sűrűségfüggvényét. Figyeljünk a tartományokra.

(b) *(8 pont)* Számolja ki $\mathbb{E}(Y)$ és $\mathrm{Var}(Y)$ értékét a toronyszabály, illetve a feltételes szórásnégyzet formula segítségével! *Segítség:* ha $Z \sim \mathrm{UNI}[a, b]$, akkor $\mathbb{E}(Z) = \frac{a+b}{2}$ és $\mathrm{Var}(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

**Gyak. 3.** *(15 pont)* Egy tárgy vizsgáján a diákok pontszámának várható értéke 75, szórása 13. Az első vizsgát 25-en, a másodikat 64-en írják meg. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy az első és a második vizsga átlagpontszáma legalább 2 ponttal eltér egymástól valamilyen irányban.

$\Phi(z)$

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |