NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2023. jan. 17.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon. Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. Legyenek A, B, B_1, B_2 események ugyanazon az eseménytéren. Tfh. $\mathbb{P}(A) > 0$.

(a) *(2 pont)* Definiálja képlettel a B esemény feltételes valószínűségét A esemény mellett.

(b) *(3 pont)* Definiálja képlettel, hogy B_1 és B_2 események mikor feltételesen függetlenek A mellett.

(c) *(7 pont)* Egy biztosítócég felmérése szerint az autóvezetők 80%-as óvatos és 20%-a óvatlan, továbbá egy óvatos autóvezető egy év alatt 5% valószínűséggel okoz baleseket, míg egy óvatlan autóvezető 15% valószínűséggel. Az egyik ügyfelük 2022-ben okozott balesetet: ugyanez az ügyfél mekkora valószínűséggel fog 2023-ban is balesetet okozni? *Instrukció:* Jelölje meg a számolásban, hogy mi feltételesen független mitől milyen feltétel mellett.

Elm. 2. (a) *(6 pont)* Írja fel a standard normális eloszlás φ sűrűségfüggvényét és bizonyítsa be, hogy φ tényleg sűrűségfüggvény.

(b) *(6 pont)* Vezesse le a standard normális eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét.

(c) *(8 pont)* Egy csillagász egy μ távolságra levő objektum távolságát méri. Méréseinek eredményei f.a.e. normális eloszlású val.változók μ várható értékkel és 2 fényév szórással. Hányszor lell mérnie, hogy a mérési átlag legalább 0.5 fényév pontos legyen legalább 95% valószínűséggel?

Elm. 3. (a) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Markov egyenlőtlenséget!

(b) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Csebisev egyenlőtlenséget!

(c) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a Nagy Számok Gyenge Törvényét!

Gyak. 1. Leülök hullócsillagokat nézni. Két hullócsillag megfigyelése közt eltelt idő átlagosan 30 perc. Jelölje U a csillagnézéssel töltött időintervallum hosszát, órában mérve. Tegyük fel, hogy U egyenletes eloszlású a $[0, 2]$ intervallumon. Jelölje X a megfigyelt hullócsillagok számát. Számolja ki $\mathbb{E}(X)$ *(5 pont)* és $\mathrm{Var}(X)$ *(13 pont)* értékét.

Gyak. 2. *(17 pont)* Trikockának nevezünk egy olyan szabályos dobókockát, aminek két oldára 1 van írva, két oldalára 2 van írva és két oldalára 3 van írva. Leültetünk körbe n embert, mindegyikük dob egyet egy trikockával. Jelölje X azon emberek számát, akik szigorúan nagyobbat dobtak a jobb oldali szomszéduknál. Jelölje Y azon emberek számát, akik szigorúan kisebbet dobtak a jobb oldali szomszéduknál. Számolja ki X és Y korrelációs együtthatóját az indikátorok összegére bontás módszerével.

Gyak. 3. *(15 pont)* Egy ℓ hosszú ropit találomra (egyenletes eloszlással választott pontban) kettétörünk. Jelöljük X-szel az így kapott két rész hosszainak négyzetösszegét. Határozzuk meg az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

Bónusz: *(10 pont)* Egy internetes közösségi szájt felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre k főből áll akkor, amikor n fős a közösség? Válaszát bizonyítsa.

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000