NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2023. jan. 24.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli kalkulátor használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a teljes valószínűség tételét!

(b) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be Bayes tételét!

(c) *(6 pont)* Egy bizonyos ketyerét 5 darabos dobozban árulnak. A dobozok fele csupa hibátlan ketyerét tartalmaz, a többi között azonos eséllyel található 1 vagy 2 hibásat tartalmazó doboz. Két különböző ketyerét véletlenszerűen kiválasztunk ugyanabból a dobozból és mindkettőt hibátlannak találjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a a többi is hibátlan lesz?

Elm. 2. (a) *(6 pont)* Írja le a szórásnégyzet kétféle definícióját és lássa be, hogy ekvivalensek.

(b) *(6 pont)* Számolja ki kézzel a $\mathrm{GEO}(p)$ eloszlás szórásnégyzetét! *Súgás:* a válasz $\frac{1-p}{p^2}$.

(c) *(7 pont)* Anna és Bori kő-papír-ollót játszanak (egymástól függetlenül egyenletesen választva a három lehetőség közül). Jelölje Y azon körök számát, amennyit játszanak, mire Anna hatodszorra nyer. Becsülje a Csebisev egyelőtlenséggel annak a valószínűségét, hogy Y a $(9, 27)$ nyílt intervallumba esik.

Elm. 3. (a) *(6 pont)* Legyen X sűrűségfüggvénye f. Legyen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorú monoton növő differenciálható függvény. Legyen $Y = T(X)$. Jelölje Y sűrűségfügvényét g. Mondja ki és vezesse le a g függvényt az f és T segítségével kifejező sűrűségfüggvény-transzformációs képletet.

(b) *(7 pont)* A síkbeli origóba leteszek egy pisztolyt, megpörgetem, és ahol megáll, ott elsütöm. Az $y = 1$ és az $y = -1$ képletű egyenesek falak. Jelölje U annak a pontnak a vízszíntes koordinátáját, ahol a lövedék a falba fúródik. Vezesse le U sűrűségfüggvényét.

Gyak. 1. Az országban évente 150 ezer végzős gimnazistának kell pályát választania. Egy gimnazista 10^{-4} valószínűséggel próbálkozik azzal, hogy űrhajósnak menjen. Az űrhajós felvéleli vizsga kétfordulós, az első a jelentkező fizikai, a második a szellemi rátermettséget méri. Tegyük fel, hogy ezek független tulajdonságok. Az első vizsgán egy jelentkező $1/3$ eséllyel megy át, a másodikon $1/5$ eséllyel. A következő kérdésekre adjon könnyen kiszámolható képleteket válaszként.

(a) *(6 pont)* Mekkora a val.sége, hogy jövőre legfeljebb egy ember megy át a felvételi vizsgán?

(b) *(6 pont)* Idén 6 ember ment át a felvételi első fordulóján. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább kettőt felvesznek közülük?

(c) *(6 pont)* Tavaly 11 jelentkező bukott meg a vizsgán. Mekkora valószínűsége, hogy 2 embert vettek fel?

Gyak. 2. *(16 pont)* Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$ pontok által meghatározott háromszögben. Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

Gyak. 3. Xavér $9 \cdot 10^6$-szor dob fel egy dobókockát, Yvette $16 \cdot 10^6$-szor. Jelölje X és Y a Xavér és Yvette által dobott számok átlagát. Becsülje a következő események valószínűségét:

(a) *(8 pont)* $\mathbb{P}(\,|X - 3.5| \le 10^{-3},\ |Y - 3.5| \le \frac{3}{4} \cdot 10^{-3},\ |X - 3.5| \ge \frac{4}{3}(Y - 3.5)\,)$

(b) *(8 pont)* $\mathbb{P}(\,9 \cdot (X - 3.5)^2 + 16 \cdot (Y - 3.5)^2 \le 4 \cdot 10^{-6}\,)$

Súgás: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$

Bónusz: *(10 pont)* Zebulon Xavérral versenyez: ha Zebulon mintaátlaga van közelebb 3.5-höz, akkor Xavér fizet két petákot Zebulonnak, ha pedig Xavéré, akkor pedig Zebulon fizet egy petákot Xavérnak. Hányszor dobja fel Zebulon a kockát, hogy igazságos legyen a játék?

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000