NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2024. jan. 16.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(5 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a teljes valószínűség tételt! (b) *(6 pont)* Mondja ki és bizonyítsa a Bayes tételt! (c) *(5 pont)* T.f.h. $E_4 \subseteq E_3 \subseteq E_2 \subseteq E_1$. Írja fel és bizonyítsa az összefüggést $\mathbb{P}(E_4)$ és $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$, $\mathbb{P}(E_3 \mid E_2)$, $\mathbb{P}(E_4 \mid E_3)$ közt.

Elm. 2.

(a) *(2+2+5 pont)* Definiálja a $\mathrm{GEO}(p)$ eloszlást a szemléletes jelentése alapján, és ennek segítségével számítsa ki a súlyfüggvényét. Számolja ki a $\mathrm{GEO}(p)$ momentumgeneráló függvényét.

(b) *(2+3+3 pont)* Definiálja a negatív binomiális eloszlást a szemléletes jelentése alapján, és ennek segítségével számítsa ki a súlyfüggvényét. Számolja ki a negatív binomiális eloszlás momentumgeneráló függvényét.

Elm. 3.

(a) *(4 pont)* Legyen az (X, Y) val.változó pár együttesen abszolút folytonos, jelölje az együttes sűrűségfüggvényüket $f(x, y)$. Definiálja a következő fogalmakat (azaz írja fel a képletüket f segítségével): Y peremeloszlás f_Y sűrűségfüggvénye, X feltételes $f_{X|Y}$ sűrűségfüggvénye $Y = y$ ismeretében, X feltételes várható értéke $Y = y$ ismeretében.

(b) *(13 pont)* Egy rádióantenna által kiadott X jel egy $\mathcal{N}(\mu, 1)$ eloszlású valószínűségi változó. A vevő által fogadott Y jel úgy keletkezik, hogy az antenna által kiadott X jelhez hozzáadódik egy X-től független Z zaj, amely $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású. Határozza meg X feltételes sűrűségfüggvényét a $Y = y$ feltétel mellett, továbbá írja fel X feltételes várható értékét a $Y = y$ feltétel mellett.

Gyak. 1. *(17 pont)* Az Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és az $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét becsüljük. Ha U és V két független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U, V) pár a $[0, 1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkorának válasszuk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy ezt a módszert alkalmazva legfeljebb 0.01 valószínűséggel kapjunk 0.05-nél nagyobb hibát, ha

(a) *(10 pont)* az $f(x) = x^4$ függvényre alkalmazzuk?

(b) *(7 pont)* egy ismeretlen $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvényre alkalmazzuk?

Gyak. 2. *(16 pont)* Az ókori Egyiptom krónikásai kétféle esztendőt különböztettek meg: szűk esztendőt és bő esztendőt. Az egymást követő esztendők egymástól függetlenül szűkek vagy bőségesek. Hossszú távon az eszendők fele szűk, fele bő. n éven át figyelve az egyiptomi krónikát, jelölje X_n azon szűk esztendők számát, amiket szűk esztendő követ, és Y_n azon bő esztendők számát, amiket bő esztendő követ. Számoljuk ki X_n és Y_n korrelációs együtthatójának limeszét, amint $n \to \infty$!

Gyak. 3. Legyenek X és Y együttesen normális eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$ és $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Alább M_i, $i = 1, 2, 3, 4$ síkidomokat jelölnek, és a feladat $\mathbb{P}(\,(X, Y) \in M_i\,)$ kiszámítása. *Súgás:* centrálás (hisz $\mathbb{E}(X) \neq 0$) + normálás = standardizálás, rajz!

(a) *(5 pont)* $M_1 = \{\,(x, y) : |x| \leq 1,\ |y| \geq 1\,\}$

(b) *(6 pont)* $M_2 = \{\,(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ y \leq x - 1\,\}$

(c) *(6 pont)* $M_3 = \{\,(x, y) : 4x^2 - 8x + y^2 \leq 0\,\}$

Bónusz: *(10 pont)* $M_4 = \{\,(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y \leq 2x\,\}$

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000