

**Valószínűségszámítás vizsga, 2024. jan. 23.**

*Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.*

*Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%-os eredménynek számít.*

- Elm. 1.** (a) (2+2+3+3 pont) Adja meg a *binomiális* és a *Poisson* eloszlás súlyfüggvényét, és számolja ki (a súlyfüggvényből, vagy más tanult módszerrel) mindkét eloszlás várható értékét.
- (b) (7 pont) Milyen határesetben és pontosan milyen értelemben közelíthető a binomiális eloszlás Poisson eloszlással? Mondja ki és bizonyítsa be az erről tanult tételt.
- Elm. 2.** (a) (6 pont) Legyenek  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók; mondja ki és bizonyítsa be ezekre a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget.
- (b) (6 pont) Hogyan definiáljuk  $X$  és  $Y$   $\rho(X, Y)$  korrelációs együtthatóját? Mi ennek a lehetséges maximális értéke? Milyen esetben kapjuk  $\rho(X, Y)$ -ra ezt a szélsőértéket? Indokoljon!
- (c) (6 pont) Mondja ki és bizonyítsa be a Steiner tételt!
- Elm. 3.** Legyenek  $X$  és  $Y$  független val.változók  $f_X(x)$ , ill.  $f_Y(y)$  sű.függvényekkel, és legyen  $Z = X + Y$ .
- (a) (8 pont) Milyen képlet adja meg  $Z$  eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét? Vezessük le!
- (b) (2 pont) Hogyan definiáljuk  $X$  momentumgeneráló függvényét?
- (c) (5 pont) Hogyan kapjuk meg  $Z$  momentumgeneráló függvényét  $X$  és  $Y$  momentumgeneráló függvényéből? Vezessük le!
- Gyak. 1.** Randomország határőreinek 60%-a felületes, 40%-a alapos. A felületes határőrök 0.6, az alaposak 0.9 eséllyel állítják meg az országba behajtani készülő autókat, egymástól függetlenül. Éppen Randomországba szeretnék behajtani, előttem a sorban halad egy kék és egy piros autó. A határőr a kék autót megállította, a piros autót viszont nem állította meg.
- (a) (9 pont) Mi ekkor a valószínűsége, hogy ez a határőr felületes természetű?
- (b) (8 pont) Tudva, hogyan járt az előbbi két autó, mi a valószínűsége, hogy ez a határőr meg fog engem állítani?
- Gyak. 2.** (16 pont) A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 80 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 2 százaléka reklamáljon?
- Bónusz:** (10 pont) A dolgozószobámban ilyen típusú villanykörtét használok, és ha kiég, azonnal kicserélem. Határozza meg a negyedik villanykörte-csere időpontjának eloszlásfüggvényét (ha év a idő mértékegysége)! *Súgás:* Mit alkotnak a körte-csere időpontok?
- Gyak. 3.** Legyenek  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  független,  $\mathcal{N}(0, 1)$  eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk az  $Y$  valószínűségi változót a  $Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  formulával.
- (a) (6 pont) Határozzuk meg az  $(X_1, Y)$  véletlen két dimenziós vektor kovarianciamátrixát.
- (b) (11 pont)  $\mathbb{P}(|Y| \leq |X_{n+1}|) = ?$

