NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

Valószínűségszámítás vizsga, 2024. jan. 9.

Munkaidő: 100 perc. Nem-programozható, internet nélküli számológép használható, standard normális eloszlástáblázat a túloldalon.

Az elérhető maximum (a bónusszal együtt): 110 pont, de már 100 pont is 100%*-os eredménynek számít.*

Elm. 1. (a) *(5 pont)* Definiálja, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események mikor teljesen függetlenek.

(b) *(6 pont)* Mutasson olyan A, B, C eseményeket, amelyekre $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$, továbbá A, B, C páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.

(c) *(5 pont)* Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Lássa be, hogy A és B akkor és csak akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Elm. 2. Legyen az X val.változó abszolút folytonos, jelölje az eloszlásfüggvényét F, sűrűségfüggvényét f.

(a) *(8 pont)* Legyen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, szigorú monoton növő bijekció. Legyen $Y = \psi(X)$. Írja fel és vezesse le az Y valószínűségi változó G eloszlásfüggvényét és g sűrűségfüggvényét F, f és ψ segítségével kifejező képleteket.

(b) *(9 pont)* Legyen $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Legyen $Y = X^4$. Írja fel Y sűrűségfüggvényét.

Elm. 3. (a) *(3 pont)* Definiálja az X valószínűségi változó $t \mapsto M(t)$ momentumgeneráló függvényét.

(b) *(2+5 pont)* Írja fel a formulát, amely kapcsolatot teremt M első/második deriváltja és X első/második momentuma közt! Bizonyítsa az M első deriváltja és X várható értéke közti összefüggést abban az esetben, amikor X abszolút folytonos, és f jelöli a sűrűségfüggvényét.

(c) *(7 pont)* Vezesse le a definícióból a standard normális eloszlás M momentumgeneráló függvényének képletét, majd M segítségével számítsa ki a standrad normális eloszlás szórásnégyzetét.

Képletgyűjtemény: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Gyak. 1. *(17 pont)* Hat játékos, A, B, C, D, E, F között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-tol 6-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel, majd az itt nyertes F-el. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$-et.

Gyak. 2. *(16 pont)* Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat és egy hamisat, ami 56% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, és ha legalább 530-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 530-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme hamis volt?

Gyak. 3. Guglinsekeresd városában háromféle okból szokott a tűzóltóság telefonhívást kapni: (i) fa tetején ragadt macskák, (ii) telefonbetyárok hamis tűzriadója, (iii) tényleges tűzesetek. Ezen telefonhívások egymástól független Poisson pontfolyamatok szerint érkeznek. Hetente átlagosan két tényleges tűzeset van. Két egymást követő telefonbetyár-hívás közt átlagosan 12 óra telik el. Hosszú távon a macskariasztás-mentes napok aránya ugyanakkora, mint az egyetlen macskariasztásos napok aránya.

(a) *(9 pont)* A feltételes várható érték toronyszabálya és a feltételes szórásnégyzet-formula segítségével számítsuk ki a mostantól számított első tűzeset előtti telefonbetyár-hívások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) *(8 pont)* Számítsuk ki a mostantól számított első tűzeset előtti telefonbetyár-hívások és macskariasztások számának kovarianciáját. *Vigyázat:* a válasz nem nulla!

Bónusz: (10 pont) Milyen eloszlású a mostantól számított első tűzeset előtti más típusú telefonhívások száma?

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000