VAL. SZÁM 1. VIZSGA, 2022 JAN 4.

$\boxed{\text{ELM 1}}$ a) HA TETSZŐLEGES $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

ESETÉN $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ TELJESÜL.

---

b) A ÉS B FÜGGETLENEK $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$

---

c) DOBJUNK FEL HÁROM FÜGGETLEN, SZABÁLYOS ÉRMÉT.

A := { ELSŐ ÉS MÁSODIK ÉRMEDOBÁS KIMENETELE UGYANAZ }

B := { 2. ÉS 3. —"— —"— —"— }

C := { 3. ÉS 1. —"— —"— —"— }

EKKOR $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = \frac{1}{4}$, TEHÁT PÁRONKÉNT FÜGGETLENEK

VISZONT $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$,

TEHÁT NEM TELJESEN FÜGGETLENEK.

$\boxed{\text{ELM 2}}$ a) $\mathbb{E}\left(e^{t \cdot X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \varphi(x)\, dx =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \cdot \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dx =$

$= e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-x)\, dx = e^{t^2/2} \cdot 1 = e^{t^2/2}$

$\boxed{\text{ELM 2}}$ b) $M(t) := \mathbb{E}(e^{t\cdot X})$ MOMENTUM GENERÁCIÓ FÜGGVÉNY

$$M(t) \overset{a)}{=} e^{t^2/2} \qquad \mathbb{E}(X) = M'(0) = 0$$

$$M'(t) = e^{t^2/2} \cdot t$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) = M''(0) = 1$$

$$M''(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{t^2/2} \cdot t\right) = e^{t^2/2} \cdot t^2 + e^{t^2/2} \cdot 1$$

$\boxed{\text{ELM 3}}$ a) $\Psi(x_0) := \mathbb{E}(Y \mid X = x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y|x_0)\, dy$

AHOL $f_{Y|X}(y|x_0) = \dfrac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)}$, AHOL $f_X(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y)\, dy$

$$\mathbb{E}(Y|X) := \Psi(X)$$

TORONYSZABÁLY: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$

---

b) $Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X))$

<u>BIZ</u>: $\mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X)) =$

$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y^2|X) - \mathbb{E}(Y|X)^2\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)^2\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)\right)^2 \overset{\text{TORONY x2, LIN.}}{=}$

$\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)^2) - \mathbb{E}(Y)^2$

$\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = Var(Y)$

$\boxed{\text{ELM 3}}$ c) $\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{X}{2}$ $\quad Var(Y \mid X) = \frac{X^2}{12}$

$$\mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3}$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y \mid X)) + Var(\mathbb{E}(Y \mid X))$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{12}\right) + Var\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$$

$\boxed{\text{GYAK 1}}$ a) $N_t :=$ A $[0,t]$ INTERVALLUMON ELADOTT DIÓS KALÁCSOK SZÁMA. $N_t \sim POI\left(t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = POI\left(\frac{t}{3}\right)$

(POISSON RITKÍTÁSA MIATT)

$$F(t) = \mathbb{P}(T < t) = \begin{cases} 0, \text{ HA } t < 0 \\ 1 - \mathbb{P}(T \geq t) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = \\ = 1 - e^{-t/3} \end{cases}$$

TEHÁT $T \sim EXP\left(\frac{1}{3}\right)$

---

b) $N :=$ REGGEL 8-TÓL DU 6-IG ELADOTT K.K.-OK SZÁMA

$N \sim POI\left(10 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2}\right) = POI(300)$

CHT MIATT

$$\text{CHT} \Rightarrow \frac{N - 300}{\sqrt{300}} =: N^* \approx \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}(N > 290) = \mathbb{P}\left(\frac{N-300}{\sqrt{300}} > \frac{290-300}{\sqrt{300}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{300}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{300}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \Phi(0.577) = 0.7190$$

GYAK 1 BÓNUSZ:

X := REGGEL 8-TÓL DU 6-IG ELADOTT DIÓSAK SZÁMA

Y := —"— —"— —"— —"— VANILIÁSAK —"—

POISSON SZÍNEZÉSE MIATT X ÉS Y FÜGGETLENEK

$$X \sim POI(200), \quad Y \sim POI(100)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{3} + 5 \leq Y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{3} - \frac{2}{3}Y \leq -5\right) = ☺$$

$$X^* := \frac{X - 200}{\sqrt{200}}, \quad Y^* := \frac{Y - 100}{\sqrt{100}}$$

$$C.H.T. \Longrightarrow X^*, Y^* \text{ F.A.E. } \mathcal{N}(0,1) \text{ (KÖZELÍTŐLEG)}$$

$$☺ = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{200}\cdot X^* + 200}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{100}\cdot Y^* + 100\right) \leq -5\right) =$$

$$\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{200}}{3}\cdot X^* - \frac{20}{3}\cdot Y^*}_{Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{200}{9} + \frac{400}{9}\right) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)} \leq -5\Bigg) = \Phi\left(\frac{-5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(0.61) = 0.27$$

AHOL $\sigma = 8.165$

GYAK 2 X := ÁDÁM KÖRÉNEK LÉTSZÁMA, AMIKOR 5 FŐS A KÖZÖSSÉG

$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 4)$ (ÁDÁM/ÉVA SZIMMETRIA MIATT)

$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3)$ —"— —"— —"—

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

FOLYT. KÖV.

$\boxed{\text{GYAK 2}}$ FOLYTATÁS:

$$\mathbb{P}(X=2) = \underbrace{\mathbb{P}(\text{ÉVA, ÁDÁM, ÁDÁM})}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}} + \underbrace{\mathbb{P}(\text{Á, É, Á})}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}} + \underbrace{\mathbb{P}(\text{Á, Á, É})}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

TEHÁT X EGYENLETES ELOSZLÁSÚ AZ $\{1,2,3,4\}$ HALMAZON.

$\boxed{\text{GYAK 3}}$ $$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\mathbb{P}(N>i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\mathbb{E}\left(\mathbb{1}[N>i]\right) \underset{\text{LIN.}}{=}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\mathbb{1}[N>i]\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N-1} i\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{N\cdot(N-1)}{2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\cdot(N^2-N)\right) \underset{\text{LIN}}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbb{E}(N^2)-\mathbb{E}(N)\right)$$