Kocka7

7. Egy kocka élének méterekben mért X hossza egyenletes eloszlású az $[1,2]$ intervallumon. Jelölje V a kocka térfogatát.

(a) Határozza meg V eloszlásfüggvényét (7 pont). Igazolja, hogy $\mathbb{E}V = 3.75$ (2 pont) és $\mathbb{D}(V) \approx 2.02$ (5 pont).

(b) Tekintsünk 400, a fenti eloszlás szerint és függetlenül választott kockát, és tölsük mindegyiket tele vízzel. Ha ezek után a kockák tartalmát át akarjuk tölteni egy a köbméter térfogatú tartályba, mennyi legyen a értéke, ha azt szeretnénk, hogy 99% valószínűséggel az összes víz beleférjen a tartályba? (12 pont) Használja a centrális határeloszlástételt, standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon.

(a) $X \sim Unif[1,2]$

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & \text{ha } c \leq 1 \\ c-1 & \text{ha } 1 < c < 2 \\ 1 & \text{ha } c \geq 2 \end{cases}$$

$V := X^3$

$$F_V(r) = \mathbb{P}(V < r) = \mathbb{P}(X^3 < r) \overset{x \to x^3 \text{ szig. mon. nő}}{=} \mathbb{P}(X < \sqrt[3]{r}) = F_X(\sqrt[3]{r}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } r \leq 1 \\ \sqrt[3]{r} - 1 & \text{ha } 1 < r < 8 \\ 1 & \text{ha } r \geq 8 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}V = \mathbb{E}(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)\,dx = \int_1^2 x^3 \cdot 1\,dx = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_1^2 = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{E}(X^6) = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 f_X(x)\,dx = \int_1^2 x^6 \cdot 1\,dx = \frac{1}{7}\left[x^7\right]_1^2 = \frac{127}{7} \approx 18{,}14$$

$$\mathbb{D}V = \sqrt{\mathbb{E}(V^2) - (\mathbb{E}V)^2} \approx \sqrt{4{,}08} \approx 2{,}02$$

(b)

$V_1, V_2, \ldots, V_{400}$ ftn, azonos eo.

$$0{,}99 = \mathbb{P}(V_1 + \ldots + V_{400} < a) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{400} V_i - 400 \cdot 3{,}75}{\sqrt{400} \cdot 2{,}02} < \frac{a - 400 \cdot 3{,}75}{\sqrt{400} \cdot 2{,}02}\right) \approx$$

$$\overset{CHT}{\approx} \Phi\left(\frac{a - 1500}{40{,}4}\right)$$

$$\frac{a - 1500}{40{,}4} = \Phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}33 \Rightarrow a = 2{,}33 \cdot 40{,}4 + 1500 \approx 1594$$

Lemez8

8. Egy négyzet alakú lemez oldalának méterekben mért X hossza egyenletes eloszlású a $[2,3]$ intervallumon. Jelölje A a lemez területét.

   (a) Határozza meg A eloszlásfüggvényét (7 pont). Igazolja, hogy $\mathbb{E}A \approx 6.33$ (2 pont) és $\mathbb{D}(A) \approx 1.445$ (5 pont).

   (b) Szeretnénk 100, a fenti eloszlás szerint és függetlenül választott lemezt befesteni. Ha 10 négyzetméter felület lefestéséhez 1 liter festékre van szükség, akkor hány liter festéket kell beszereznünk, hogy 98% valószínűséggel minden lemezt be tudjunk festeni? Azaz: legalább mennyi b, ha 98% valószínűséggel b liter festék elegendő mind a 100 lemez befestéséhez? (12 pont) Használja a centrális határeloszlástételt, standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon.

(a) $X \sim Unif[2,3]$

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & \text{ha } c \le 2 \\ c-2 & \text{ha } 2 < c < 3 \\ 1 & \text{ha } c \ge 3 \end{cases}$$

$$A := X^2$$

$x \to x^2$ szig. mon. nő $2 \le x \le 3$-re

$$F_A(r) = \mathbb{P}(A < r) = \mathbb{P}(X^2 < r) = \mathbb{P}(X < \sqrt{r}) = F_X(\sqrt{r}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } r \le 4 \\ \sqrt{r}-2 & \text{ha } 4 < r < 9 \\ 1 & \text{ha } r \ge 9 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}A = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_2^3 x^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_2^3 = \frac{19}{3} \approx 6{,}33$$

$$\mathbb{E}(A^2) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)\,dx = \int_2^3 x^4 \cdot 1\,dx = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_2^3 = \frac{211}{5} = 42{,}2$$

$$\mathbb{D}(A) = \sqrt{\mathbb{E}(A^2) - (\mathbb{E}A)^2} \approx \sqrt{2{,}89} \approx 1{,}445$$

(b) $A_1, \ldots, A_{100}$ ftn, azonos eo.

$$0{,}98 = \mathbb{P}(A_1 + \ldots + A_{100} \le 10b) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i - 100 \cdot 6{,}33}{\sqrt{100} \cdot 1{,}445} \le \frac{10b - 100 \cdot 6{,}33}{\sqrt{100}\, 1{,}445}\right) \overset{CHT}{\approx}$$

$$\overset{CHT}{\approx} \Phi\left(\frac{b - 63{,}3}{1{,}445}\right)$$

$$\frac{b - 63{,}3}{1{,}445} = \Phi^{-1}(0{,}98) = 2{,}06 \Rightarrow b = 2{,}06 \cdot 1{,}445 + 63{,}3 = 66{,}28$$

Normális9

9. Legyen (U, V) kétdimenziós normális eloszlású $(0,0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Legyen továbbá $X = U + 2V$ és $Y = U - 2V$. (Standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon.)

   (a) Mutassuk meg, hogy X és Y függetlenek, továbbá $X \sim \mathcal{N}(0, 12)$ és $Y \sim \mathcal{N}(0, 4)$. (10 pont)

   (b) Legyen M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái (X, Y). Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

      i. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 2 \}$; (6 pont) (*Hasznos lehet:* $\sqrt{12} \approx 3,464$.)

      ii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} \le 1 \}$; (7 pont)

      iii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \ge 0;\ |x| \le 2;\ |y| \le 1 \}$. (7 pont)

(a) (U,V) 2 dim norm $\Rightarrow$ $(X,Y) = (U+2V, U-2V)$ is 2 dim. norm.

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}U + 2\mathbb{E}V = 0, \quad \mathbb{E}Y = \mathbb{E}U - 2\mathbb{E}V = 0$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Cov}(U+2V, U+2V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= \mathrm{Cov}(U,U) + 2\,\mathrm{Cov}(U,V) + 2\,\mathrm{Cov}(V,U) + 4\,\mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 4 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 12$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Cov}(U-2V, U-2V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= \mathrm{Cov}(U,U) - 2\,\mathrm{Cov}(U,V) - 2\,\mathrm{Cov}(V,U) + 4\,\mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 4 - 2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 4$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(U+2V, U-2V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= \mathrm{Cov}(U,U) - 2\,\cancel{\mathrm{Cov}(U,V)} + 2\,\cancel{\mathrm{Cov}(V,U)} - 4\,\mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 4 - 4\cdot 1 = 0$

(X,Y) többdim. norm és $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ és Y függetlenek

(b)

Legyen $X^* := \frac{X}{\sqrt{12}}$, $Y^* := \frac{Y}{2}$. Ekkor $X^*; Y^* \sim \mathcal{N}(0,1)$ függetlenek

i)

0,87

$$\mathbb{P}(0 \le X \le 3,\ 0 \le Y \le 2) = \mathbb{P}\left(0 \le X^* \le \frac{3}{\sqrt{12}},\ 0 \le Y^* \le 1\right) \overset{\text{ftlnség}}{=}$$

$$= [\Phi(0,87) - \Phi(0)][\Phi(1) - \Phi(0)] \approx (0,8078 - 0,5)(0,8413 - 0,5) =$$

$$= 0,1051$$

ii) $$\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{4} \le 1\right) = \mathbb{P}(X^{*2} + Y^{*2} \le 1) = \iint_{|(x,y)| \le 1} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}}_{\left(e^{-\frac{r^2}{2}}\right)'} dr = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - 0,6065 = 0,3935$$

Másképp: $$\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{4} \le 1\right) = \mathbb{P}(X^{*2} + Y^{*2} \le 1) \overset{\text{11.4 b)-ből, } U_1 \sim Unif[0,1]}{=} \mathbb{P}(-2\ln(U_1) \le 1) =$$

$$= \mathbb{P}\left(U_1 \ge e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

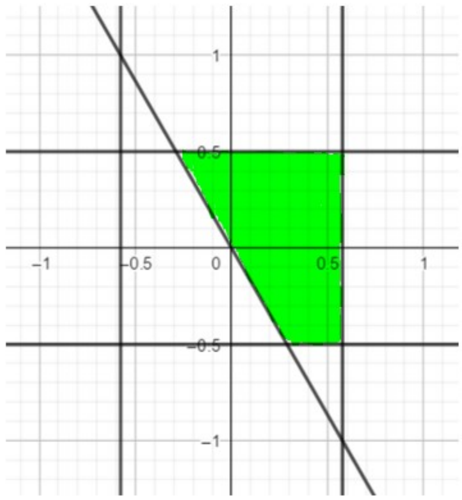
iii) $$\mathbb{P}(X+Y \ge 0,\ |X| \le 2,\ |Y| \le 1) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Y^* \ge -\frac{\sqrt{12}}{2} X^*,\ |X|^* \le \frac{2}{\sqrt{12}},\ |Y|^* \le \frac{1}{2}\right) \overset{\text{forgszim.}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\left(|X|^* \le \frac{2}{\sqrt{12}},\ |Y|^* \le \frac{1}{2}\right) \overset{\text{ftlnség}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(0,58) - \Phi(-0,58)\right)\left(\Phi(0,5) - \Phi(-0,5)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\underbrace{\Phi(0,58)}_{0,7190} - 1\right)\left(2\underbrace{\Phi(0,5)}_{0,6915} - 1\right) \approx 0,0839$$



Normális10

10. Legyen (U, V) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 9 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Legyen továbbá $X = 3U + V$ és $Y = 3U - V$. (Standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon.)

(a) Mutassuk meg, hogy X és Y függetlenek, továbbá $X \sim \mathcal{N}(0, 27)$ és $Y \sim \mathcal{N}(0, 9)$. (10 pont)

(b) Legyen M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái (X, Y). Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

i. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 3 \}$; (6 pont) (*Hasznos lehet:* $\sqrt{27} \approx 5.196$.)

ii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{9} \le 1 \}$; (7 pont)

iii. $M \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge y;\ |x| \le 1;\ |y| \le 2 \}$. (7 pont)

(a) (U,V) 2 dim norm $\Rightarrow$ $(X,Y) = (3U+V, 3U-V)$ is 2 dim. norm.

$\mathbb{E}X = 3\mathbb{E}U + \mathbb{E}V = 0$, $\mathbb{E}Y = 3\mathbb{E}U - \mathbb{E}V = 0$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Cov}(3U+V, 3U+V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= 9\,\mathrm{Cov}(U,U) + 3\,\mathrm{Cov}(U,V) + 3\,\mathrm{Cov}(V,U) + \mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 9 \cdot 1 + 6 \cdot 1{,}5 + 9 = 27$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Cov}(3U-V, 3U-V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= 9\,\mathrm{Cov}(U,U) - 3\,\mathrm{Cov}(U,V) - 3\,\mathrm{Cov}(V,U) + \mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 9 \cdot 1 - 6 \cdot 1{,}5 + 9 = 9$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(3U+V, 3U-V) \overset{\text{bilin}}{=}$
$= 9\,\mathrm{Cov}(U,U) - \cancel{\mathrm{Cov}(U,V)} + \cancel{\mathrm{Cov}(V,U)} - \mathrm{Cov}(V,V) =$
$= 9 \cdot 1 - 9 = 0$

(X,Y) többdim. norm és $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ és Y függetlenek

(b) Legyen $X^* := \frac{X}{\sqrt{27}}$, $Y^* := \frac{Y}{3}$. Ekkor $X^*, Y^* \sim N(0,1)$ függetlenek

i. 0,77

i)

$$\mathbb{P}(0\le X\le 4,\ 0\le Y\le 3) = \mathbb{P}\Big(0\le X^*\le \overbrace{\tfrac{4}{\sqrt{27}}}^{0,77},\ 0\le Y^*\le 1\Big) \overset{\text{ftlnség}}{=}$$

$$= \left[\Phi(0,77)-\Phi(0)\right]\left(\Phi(1)-\Phi(0)\right) \approx (0,7794-0,5)(0,8413-0,5) =$$

$$= 0,0954$$

ii)

$$\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{27}+\frac{Y^2}{9}\le 1\right) = \mathbb{P}\left(X^{*2}+Y^{*2}\le 1\right) = \iint_{|(x,y)|\le 1} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}}_{\left(e^{-\frac{r^2}{2}}\right)'} dr = 1-e^{-\frac{1}{2}} \approx 1-0,6065 = 0,3935$$

Másképp: $\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{27}+\frac{Y^2}{9}\le 1\right) = \mathbb{P}\left(X^{*2}+Y^{*2}\le 1\right) \overset{11.4\,b)\text{-ből},\ U_1\sim \mathrm{Unif}[0,1]}{=} \mathbb{P}(-2\ln(U_1)\le 1) =$

$$= \mathbb{P}\left(U_1 \ge e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

iii)

$$\mathbb{P}(X\ge Y,\ |X|\le 1,\ |Y|\le 2) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{27}}{3}X^*\ge Y^*,\ |X|^*\le \frac{1}{\sqrt{27}},\ |Y|^*\le \frac{2}{3}\right) \overset{\text{forgásin}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(|X|^*\le \frac{1}{\sqrt{27}},\ |Y|^*\le \frac{2}{3}\right) \overset{\text{ftlnség}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(0,19)-\Phi(-0,19)\right)\left(\Phi(0,67)-\Phi(-0,67)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2\underbrace{\Phi(0,19)}_{0,5753}-1\Big)\Big(2\underbrace{\Phi(0,67)}_{0,7486}-1\Big) \approx 0,0374$$