Torony1

2020. december 20., vasárnap 16:50

1. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel, legyen továbbá Y feltételes eloszlása rögzített $X = x$ mellett egyenletes az $[x, x+1]$ intervallumon.
   (a) Adja meg az (X, Y) pár közös sűrűségfüggvényét. (5 pont)
   (b) Határozza meg Y peremsűrűség-függvényét. (5 pont)
   (c) $\mathbb{E}(Y) =?$ (5 pont) (Lehet az előző részfeladat alapján, de talán van gyorsabb módszer is.)
   (d) $Cov(X, Y) =?$ (7 pont)

a) $f_X(x) = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \mathbb{1}[x > 0]$

$f_{Y|X}(y|x) = \mathbb{1}[x < y < x+1]$

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \mathbb{1}[0 < x < y < x+1]}$$

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0 \vee (y-1)}^{y} 2 \cdot e^{-2x}\,dx =$

$= \left[-e^{-2x}\right]_{0 \vee (y-1)}^{y} = \left(e^{-2 \cdot (0 \vee (y-1))} - e^{-2y}\right) \cdot \mathbb{1}[y > 0]$

c) $\boxed{\mathbb{E}(Y) \overset{\text{TORONY}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(X + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$

$\mathbb{E}(Y | X = x) = x + \frac{1}{2}$

$X \sim EXP(2)$

d) $Y = X + Z_1$, AHOL $Z \sim UNI[0,1]$ ÉS Z_1 FÜGGETLEN X-TŐL

$\boxed{Cov(X, Y)} = Cov(X, X + Z_1) = Cov(X, X) + \underbrace{Cov(X, Z_1)}_{=0} =$

$= Var(X) = \boxed{\frac{1}{4}}$

Torony2

2020. december 20., vasárnap 16:50

2. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, legyen továbbá Y feltételes eloszlása rögzített $X = x$ mellett egyenletes az $[x, x+2]$ intervallumon.
   (a) Adja meg az (X, Y) pár közös sűrűségfüggvényét. (5 pont)
   (b) Határozza meg Y peremsűrűség-függvényét. (5 pont)
   (c) $\mathbb{E}(Y) =?$ (5 pont) (Lehet az előző részfeladat alapján, de talán van gyorsabb módszer is.)
   (d) $Cov(X, Y) =?$ (7 pont)

a) $f_X(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}[x > 0]$

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}[x < y < x+2]$

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}[0 < x < y < x+2]}$$

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0 \vee (y-2)}^{y} e^{-x} \cdot \frac{1}{2}\,dx =$

$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x}\right]_{0 \vee (y-2)}^{y} = \frac{1}{2}\left(e^{-(0 \vee (y-2))} - e^{-y}\right) \cdot \mathbb{1}[y > 0]$

c) $\boxed{\mathbb{E}(Y) \overset{\text{TORONY}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X+1) = 1+1=2}$

$\mathbb{E}(Y | X = x) = x + 1$

$X \sim \text{EXP}(\ )$

d) $Y = X + Z_1$, AHOL $Z \sim \text{UNI}[0,2]$ ÉS Z_1 FÜGGETLEN X-TŐL

$\boxed{Cov(X,Y)} = Cov(X, X+Z_1) = Cov(X,X) + \underbrace{Cov(X,Z_1)}_{=0} =$

$= Var(X) = \boxed{1}$

Torony3

2020. december 20., vasárnap 16:50

3. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, legyen továbbá Y feltételes eloszlása rögzített $X = x$ mellett egyenletes a $[2x, 2x+1]$ intervallumon.
   (a) Adja meg az (X, Y) pár közös sűrűségfüggvényét. (5 pont)
   (b) Határozza meg Y peremsűrűség-függvényét. (5 pont)
   (c) $\mathbb{E}(Y) =?$ (5 pont) (Lehet az előző részfeladat alapján, de talán van gyorsabb módszer is.)
   (d) $Cov(X, Y) =?$ (7 pont)

a) $f_X(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}[x>0]$

$f_{Y|X}(y|x) = \mathbb{1}[2x<y<2x+1]$

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}\left[0<x<\frac{y}{2}<x+\frac{1}{2}\right]}$$

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0 \vee (\frac{y}{2}-\frac{1}{2})}^{y/2} e^{-x}\,dx$

$= \left[-e^{-x}\right]_{0\vee(\frac{y}{2}-\frac{1}{2})}^{y/2} = \left(e^{-(0\vee(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}))} - e^{-y/2}\right) \cdot \mathbb{1}[y>0]$

c) $\boxed{\mathbb{E}(Y)} \overset{\text{TORONY}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(2X+\frac{1}{2}\right) \underset{X \sim EXP(1)}{=} 2+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$

$\mathbb{E}(Y|X=x) = 2x+\frac{1}{2}$

d) $Y = 2X + Z_1$, AHOL $Z \sim UNI[0,1]$ ÉS Z_1 FÜGGETLEN X-TŐL

$\boxed{Cov(X,Y)} = Cov(X, 2X+Z_1) = 2 \cdot Cov(X,X) + \underbrace{Cov(X,Z_1)}_{=0} =$

$= 2 \cdot Var(X) = \boxed{2}$

Kincs4

2020. december 20., vasárnap 18:16

4. Legyen X egy szabályos érmedobásnál a Írás indikátora, azaz $X = 0$, ha az érme a Fej oldalára, és $X = 1$, ha az Írás oldalára esik. $4 + X$ különböző típusú kincset kell összegyüjtenünk kincsesládák felnyitogatásával. Minden láda pontosan egy kincset tartalmaz, melynek típusa a többitől függetlenül lehet bármelyik, egyforma valószínűséggel, a lehetséges $4 + X$ típus közül. Jelölje Y, hogy hány ládát kell felnyitnunk az összes típus összegyüjtéséhez. Az alábbi kérdésekre nem feltétlenül kérünk numerikus értéket, elég a *pontos* eredményt egy *néhány* tagból álló összeg formájában megadni.

   (a) $\mathbb{P}(Y \leq 9 | X = 0) =$? (12 pont)

   (b) $\mathbb{E}Y$=? (10 pont)

Bónusz $Var(Y)$=? (10 pont)

a) $X = 0$, AZAZ 4-FÉLE KINCS VAN

$A_i = \{i$-EDIK FAJTA KINCS NEM VOLT MEG 9 LÁDA-NYITÁSBÓL$\}$

$$\mathbb{P}(Y \leq 9 | X = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c \,\middle|\, X = 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i \,\middle|\, X = 0\right) =$$

$$= 1 - \sum_{\substack{I \subseteq [4] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \,\middle|\, X = 0\right)$$

$$= 1 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^9 - \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 + \binom{4}{4} \cdot 0$$

---

b) COUPON COLLECTOR PROBLEM:

HA n-FÉLE KINCS VAN, AKKOR

$Y_j :=$ HÁNY LÁDÁT KELL KINYITNOM AZUTÁN, HOGY A j-EDIK FAJTA KINCS MEGVOLT AHHOZ, HOGY A $j+1$-EDIK FAJTA IS MEGLEGYEN

$j = 0, 1, \ldots, n-1$ $\quad Y_j \sim GEO\left(\frac{n-j}{n}\right)$

$Y = Y_0 + \ldots + Y_{n-1}$ $\quad \mathbb{E}(Y_j) = \frac{n}{n-j}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =: M_n$$

NÁLUNK: KINCSEK SZÁMA : $4 + X$

$$\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = M_{4+\mathbb{X}} = (4+\mathbb{X})\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{4+\mathbb{X}}\right)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{Y}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) = \frac{1}{2}\cdot M_4 + \frac{1}{2} M_5 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

<u>BÓNUSZ</u>: HA n-FÉLE KINCS VAN: A FENTEBB DEFINIÁLT $\mathbb{Y}_0, \mathbb{Y}_1, \dots, \mathbb{Y}_{n-1}$ FÜGGETLENEK. ÍGY:

$$\mathrm{Var}(\mathbb{Y}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}(\mathbb{Y}_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-\frac{n-j}{n}}{\left(\frac{n-j}{n}\right)^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j/n}{(n-j)^2/n^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} n\cdot\frac{j}{(n-j)^2} = n\cdot\left(\frac{0}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{2}{(n-2)^2}+\dots+\frac{n-2}{2^2}+\frac{n-1}{1^2}\right) =: V_n$$

NÁLUNK $4+\mathbb{X}$-FÉLE KINCS VAN.

$$\mathrm{Var}(\mathbb{Y}) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Var}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) =$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(V_{4+\mathbb{X}})}_{\frac{1}{2}\cdot V_4 + \frac{1}{2}\cdot V_5} + \underbrace{\mathrm{Var}(M_{4+\mathbb{X}})}_{\frac{1}{4}\cdot(M_5-M_4)^2} =$$

$M_{4+\mathbb{X}}$ EGY OLYAN VAL. VÁLTOZÓ, AMINEK AZ ÉRTÉKE $\frac{1}{2}$ VAL.SÉGGEL M_4,

$\frac{1}{2}$ — " — M_5,

ÉS ÍGY A VARIANCIÁJA $\frac{1}{4}\cdot(M_5-M_4)^2$

Kincs5

2020. december 20., vasárnap 18:16

5. Legyen X egy szabályos érmedobásnál a Írás indikátora, azaz $X = 0$, ha az érme a Fej oldalára, és $X = 1$, ha az Írás oldalára esik. $6 + X$ különböző típusú kincset kell összegyüjtenünk kincsesládák felnyitogatásával. Minden láda pontosan egy kincset tartalmaz, melynek típusa a többitől függetlenül lehet bármelyik, egyforma valószínűséggel, a lehetséges $6 + X$ típus közül. Jelölje Y, hogy hány ládát kell felnyitnunk az összes típus összegyüjtéséhez. Az alábbi kérdésekre nem feltétlenül kérünk numerikus értéket, elég a *pontos* eredményt egy *néhány* tagból álló összeg formájában megadni.

   (a) $\mathbb{P}(Y \leq 11 | X = 0) =?$ (12 pont)

   (b) $\mathbb{E}Y =?$ (10 pont)

   Bónusz $Var(Y) =?$ (10 pont)

a) $X = 0$, AZAZ 6-FÉLE KINCS VAN

$A_i = \{$ i-EDIK FAJTA KINCS NEM VOLT MEG 11 LÁDA-NYITÁSBÓL $\}$

$$\mathbb{P}(Y \leq 11 | X = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c \,\Big|\, X = 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i \,\Big|\, X = 0\right) =$$

$$= 1 - \sum_{\substack{I \subseteq [6] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \,\Big|\, X = 0\right)$$

$$= 1 - \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} + \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{11} - \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{11} + \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{11} - \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11}$$

---

b) COUPON COLLECTOR PROBLEM:

HA n-FÉLE KINCS VAN, AKKOR

$Y_j :=$ HÁNY LÁDÁT KELL KINYITNOM AZUTÁN, HOGY A j-EDIK FAJTA KINCS MEGVOLT AHHOZ, HOGY A $j+1$-EDIK FAJTA IS MEGLEGYEN

$j = 0, 1, \ldots, n-1$ $\qquad Y_j \sim GEO\left(\frac{n-j}{n}\right)$

$Y = Y_0 + \ldots + Y_{n-1}$ $\qquad \mathbb{E}(Y_j) = \frac{n}{n-j}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =: M_n$$

NÁLUNK: KINCSEK SZÁMA : $6 + X$

$$\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = M_{6+\mathbb{X}} = (6+\mathbb{X})\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6+\mathbb{X}}\right)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{Y}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) = \frac{1}{2}\cdot M_6 + \frac{1}{2} M_7 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{7}\right)$$

BÓNUSZ: HA n-FÉLE KINCS VAN: A FENTEBB DEFINIÁLT $\mathbb{Y}_0, \mathbb{Y}_1, \dots, \mathbb{Y}_{n-1}$ FÜGGETLENEK. ÍGY:

$$\mathrm{Var}(\mathbb{Y}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}(\mathbb{Y}_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-\frac{n-j}{n}}{\left(\frac{n-j}{n}\right)^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j/n}{(n-j)^2/n^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} n\cdot\frac{j}{(n-j)^2} = n\cdot\left(\frac{0}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{2}{(n-2)^2}+\dots+\frac{n-2}{2^2}+\frac{n-1}{1^2}\right) =: V_n$$

NÁLUNK $6+\mathbb{X}$-FÉLE KINCS VAN.

$$\mathrm{Var}(\mathbb{Y}) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Var}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}(\mathbb{Y}|\mathbb{X})\big) =$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(V_{6+\mathbb{X}})}_{\frac{1}{2}\cdot V_6 + \frac{1}{2}\cdot V_7} + \underbrace{\mathrm{Var}(M_{6+\mathbb{X}})}_{\frac{1}{4}\cdot(M_7-M_6)^2} =$$

$M_{6+\mathbb{X}}$ EGY OLYAN VAL. VÁLTOZÓ, AMINEK
AZ ÉRTÉKE $\frac{1}{2}$ VAL.SÉGGEL M_6,
$\frac{1}{2}$ — " — M_7,
ÉS ÍGY A VARIANCIÁJA $\frac{1}{4}\cdot(M_7-M_6)^2$

Kincs6

2020. december 20., vasárnap 18:16

6. Legyen X egy szabályos érmedobásnál a Írás indikátora, azaz $X = 0$, ha az érme a Fej oldalára, és $X = 1$, ha az Írás oldalára esik. $5 + X$ különböző típusú kincset kell összegyűjtenünk kincsesládák felnyitogatásával. Minden láda pontosan egy kincset tartalmaz, melynek típusa a többitől függetlenül lehet bármelyik, egyforma valószínűséggel, a lehetséges $5 + X$ típus közül. Jelölje Y, hogy hány ládát kell felnyitnunk az összes típus összegyűjtéséhez. Az alábbi kérdésekre nem feltétlenül kérünk numerikus értéket, elég a *pontos* eredményt egy *néhány* tagból álló összeg formájában megadni.

(a) $\mathbb{P}(Y \leq 10 | X = 0) =$? (12 pont)

(b) $\mathbb{E}Y$=? (10 pont)

Bónusz $Var(Y)$=? (10 pont)

a) $X = 0$, AZAZ 5-FÉLE KINCS VAN

$A_i = \{i$-EDIK FAJTA KINCS NEM VOLT MEG 10 LÁDA-NYITÁSBÓL$\}$

$$\mathbb{P}(Y \leq 10 | X = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i^c \,\middle|\, X = 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i \,\middle|\, X = 0\right) =$$

$$= 1 - \sum_{\substack{I \subseteq [5] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \,\middle|\, X = 0\right)$$

$$= 1 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{10} - \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{10} + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

---

b) COUPON COLLECTOR PROBLEM:

HA n-FÉLE KINCS VAN, AKKOR

$Y_j :=$ HÁNY LÁDÁT KELL KINYITNOM AZUTÁN, HOGY A j-EDIK FAJTA KINCS MEGVOLT AHHOZ, HOGY A $j+1$-EDIK FAJTA IS MEGLEGYEN

$j = 0, 1, \ldots, n-1$ $\quad Y_j \sim GEO\left(\frac{n-j}{n}\right)$

$Y = Y_0 + \ldots + Y_{n-1}$ $\quad \mathbb{E}(Y_j) = \frac{n}{n-j}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =: M_n$$

NÁLUNK: KINCSEK SZÁMA : $5 + X$

$$\mathbb{E}(Y|X) = M_{5+X} = (5+X)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{5+X}\right)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \frac{1}{2}\cdot M_5 + \frac{1}{2} M_6 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{6}\right)$$

BÓNUSZ: HA n-FÉLE KINCS VAN: A FENTEBB DEFINIÁLT $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ FÜGGETLENEK. ÍGY:

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}(Y_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-\frac{n-j}{n}}{\left(\frac{n-j}{n}\right)^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j/n}{(n-j)^2/n^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} n\cdot\frac{j}{(n-j)^2} = n\cdot\left(\frac{0}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{2}{(n-2)^2}+\dots+\frac{n-2}{2^2}+\frac{n-1}{1^2}\right) =: V_n$$

NÁLUNK $5+X$-FÉLE KINCS VAN.

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) =$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(V_{5+X})}_{\frac{1}{2}\cdot V_5 + \frac{1}{2}\cdot V_6} + \underbrace{\mathrm{Var}(M_{5+X})}_{\frac{1}{4}\cdot(M_6-M_5)^2} =$$

M_{5+X} EGY OLYAN VAL. VÁLTOZÓ, AMINEK AZ ÉRTÉKE $\frac{1}{2}$ VAL.SÉGGEL M_5,
$\frac{1}{2}$ — " — M_6,
ÉS ÍGY A VARIANCIÁJA $\frac{1}{4}\cdot(M_6-M_5)^2$