VSZ1 VIZSGA, 2023.12.19.

$\boxed{E1}$ a) $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$, AHOL $m = \mathbb{E}(X)$

$Var(aX+b) \overset{LIN.}{=} \mathbb{E}\left(\left(a\cdot X + b - \underbrace{(a\cdot m + b)}_{=\mathbb{E}(a\cdot X+b)}\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(a^2\cdot (X-m)^2\right) \overset{LIN.}{=} a^2 \cdot Var(X)$

b) $\boxed{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)} \iff \boxed{Cov(X,Y) = 0}$

<u>BIZ</u>: $Var(X+Y) \overset{BIL.}{=} Var(X) + Var(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$

c) $X \sim BIN(n,p) \iff X = X_1 + \ldots + X_n$, AHOL

$X_i = \mathbb{1}[A_i]$, AHOL $A_1, A_2, \ldots, A_n$ FÜGGETLENEK

ÉS $\mathbb{P}(A_i) = p$. ÍGY $\mathbb{E}(X) \overset{LIN}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\cdot p$

$Var(X) = \sum_{i,j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \overset{FÜGGETLENEK}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} Cov(X_i, X_i) =$

$= n \cdot Var(X_1) = n\cdot\left(\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2\right) = n\cdot(p-p^2) = n\cdot p\cdot (1-p)$

---

$\boxed{E2}$ a) $f(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot \mathbb{1}[x>0]$

$M(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\cdot X}\right) \overset{L.O.T.U.S.}{=\!=\!=} \int_0^\infty e^{t\cdot x}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx =$

$= \lambda\cdot\int_0^\infty e^{(t-\lambda)\cdot x}\,dx = \begin{cases} +\infty, & \text{HA } t \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda-t}\cdot \underbrace{\int_0^\infty (\lambda-t)\cdot e^{-(\lambda-t)\cdot x}\,dx}_{=1}, & = \frac{\lambda}{\lambda-t} \text{ HA } t<\lambda \end{cases}$

1. OLDAL

$\boxed{E2}$ b) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ HA } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \text{ HA } x \ge 0 \end{cases}$ : $\mathfrak{X}$ ELOSZLÁS-FÜGGVÉNYE

GYAKORLATRÓL TUDJUK, HOGY $F(\mathfrak{X}) \sim UNI[0,1]$

ÍGY $\boxed{\Psi(x) = F(x)}$. ÉS VALÓBAN: $\mathbb{P}(\Psi(\mathfrak{X}) \in [0,1]) = 1$

ÉS HA $x \in (0,1)$, AKKOR $\mathbb{P}(\Psi(\mathfrak{X}) \le x) = \mathbb{P}(\mathfrak{X} \le \Psi^{-1}(x)) =$

$= F(\Psi^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$ ✓ $\Psi(\mathfrak{X}) \sim UNI[0,1]$ ✓

---

c) HA $s, t \in \mathbb{R}_+$, AKKOR

$$\mathbb{P}(\mathfrak{X} \ge t+s \mid \mathfrak{X} \ge t) = \frac{\mathbb{P}(\mathfrak{X} \ge t+s)}{\mathbb{P}(\mathfrak{X} \ge t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda \cdot (t+s)}}{e^{-\lambda \cdot t}} = e^{-\lambda \cdot s} = \mathbb{P}(\mathfrak{X} \ge s)$$

---

$\boxed{E3}$ a) $\mathbb{E}(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{X} = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{\mathfrak{Y}|\mathfrak{X}}(y|x)\, dy =: \Psi(x)$

$$\mathbb{E}(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{X}) := \Psi(\mathfrak{X})$$

<u>TORONYSZABÁLY</u>: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{X})) = \mathbb{E}(\mathfrak{Y})$

<u>BIZ</u>: $\mathbb{E}(\Psi(\mathfrak{X})) \overset{L.O.T.U.S}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cdot f_{\mathfrak{X}}(x)\, dx$

$$= \iint y \cdot f_{\mathfrak{Y}|\mathfrak{X}}(y|x)\, dy\, f_{\mathfrak{X}}(x)\, dx = \iint y \cdot \frac{f(x,y)}{f_{\mathfrak{X}}(x)} \cdot f_{\mathfrak{X}}(x)\, dy\, dx$$

$$= \iint y \cdot f(x,y)\, dy\, dx = \int y \cdot \underbrace{\int f(x,y) \cdot dx}_{f_{\mathfrak{Y}}(y)}\, dy = \mathbb{E}(\mathfrak{Y})$$

2. OLDAL

$\boxed{E3}$ b) $X :=$ AHANYADIK AJTÓT VÁLASZTJA

$T :=$ KIJUTÁSI IDŐ

$\mathbb{E}(T \mid X=1) = 3 + \mathbb{E}(T)$, $\mathbb{E}(T \mid X=2) = 4 + \mathbb{E}(T)$

$\mathbb{E}(T \mid X=3) = 5$

TORONYSZABÁLY (AVAGY TELJES VÁRHATÓ ÉRTÉK TÉTELE):

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T \mid X)) = (3+\mathbb{E}(T))\cdot\frac{1}{3} + (4+\mathbb{E}(T))\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{12}{3} + \frac{2}{3}\cdot\mathbb{E}(T)$$ ÁTRENDEZVE: $\boxed{\mathbb{E}(T) = 12}$

---

$\boxed{\text{GYAK 1}}$ COUPON COLLECTOR'S PROBLEM:

$X = X_0 + X_1 + X_2 + X_3$, AHOL $X_i$ = AZON MENÜ-VÁSÁRLÁSOK SZÁMA, AMI AHHOZ KELL, HOGY $i$-RŐL $i+1$-RE NŐJÖN A MEGLÉVŐ AKCIÓFIGURA-FAJTÁIM SZÁMA.

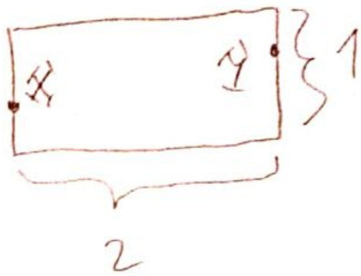
$X_1, X_2, X_3, X_4$ FÜGGETLENEK. $X_i \sim GEO\left(\frac{4-i}{4}\right)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}(X_i) = \frac{4}{4-0} + \frac{4}{4-1} + \frac{4}{4-2} + \frac{4}{4-3}$$

$$Var(X) \underset{\text{FÜGGETL.}}{=} \sum_{i=0}^{3} Var(X_i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{1-\frac{4-i}{4}}{\left(\frac{4-i}{4}\right)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \frac{i/4}{(4-i)^2/4^2} = 4\cdot\sum_{i=0}^{3}\frac{i}{(4-i)^2} = 4\cdot\left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{1^2}\right)$$

GYAK 2



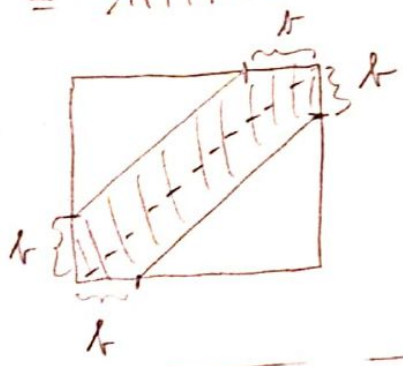

$X, Y$ F.A.E. UNI$[0,1]$

$$Z_1 = \sqrt{2^2 + (X-Y)^2}$$

$$F(z) = \mathbb{P}(Z_1 \le z) = \begin{cases} 0, & \text{HA } z \le 2 \\ \star, & \text{HA } z \in (2, \sqrt{5}) \\ 1, & \text{HA } z \ge \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\star = \mathbb{P}(4 + (X-Y)^2 \le z^2) = \mathbb{P}\left(|X-Y| \le \sqrt{z^2-4}\right) =$$

$$= \text{SATÍROZOTT TERÜLET} = 1 - \left(1 - \sqrt{z^2-4}\right)^2$$




$$b = \sqrt{z^2-4}$$

---

GY 3 a) $N_t :=$ A 0-TÓL $t$-IG ÉRKEZŐ VÁSÁRLÓK SZÁMA

$N_t \sim \mathrm{POI}\left(t \cdot \frac{1}{2}\right)$ (HISZ HA 2 A PONTOK KÖZTI VÁRHATÓ ÉRTÉK, AKKOR $\frac{1}{2}$ AZ INTENZITÁS)

(POISSON PONTFOLYAMAT)

$M_t :=$ A 0-TÓL $t$-IG ÉRKEZŐ ZSELÉS VÁSÁRLÓK SZÁMA

POISSON RITKÍTÁSA: $M_t \sim \mathrm{POI}(t/4)$

$T :=$ ELSŐ ZSELÉS VÁSÁRLÓ ÉRKEZÉSI IDŐPONTJA

$$\mathbb{P}(T \le t) = \mathbb{P}(M_t \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(M_t = 0) = 1 - e^{-t/4}$$

TEHÁT $T \sim \mathrm{EXP}(1/4)$

b) $X' =$ 8.00-TÓL 14.00-IG JÖTT VEVŐK SZÁMA

$Y' =$ 14.00-TÓL 20.00-IG –"– –"– –"–

$X' \sim POI(180)$, $Y' \sim POI(180)$, $X', Y'$ F.A.E.

$\boxed{X'^* = \frac{X' - 180}{\sqrt{180}}}$ $\boxed{Y'^* = \frac{Y' - 180}{\sqrt{180}}}$ $\boxed{\text{C.H.T.}: X'^*, Y'^* \text{ KÁBÉ } N(0,1)}$

$$\mathbb{P}(|X' - Y'| \leq 10) = \mathbb{P}\left(|X'^* - Y'^*| \leq \frac{10}{\sqrt{180}}\right) = (A)$$

$\boxed{Z_1 := X'^* - Y'^*}$ $Z_1 \sim N(0,2)$ $Z^* = \frac{Z}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$$(A) = \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{10}{\sqrt{180}}\right) = \mathbb{P}\left(|Z^*| \leq \frac{10}{\sqrt{360}}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(|Z^*| \leq \frac{\sqrt{10}}{6}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(0.527) - 1$$

$$= 2 \cdot (0.7019) - 1 = 0.4038$$

---

BÓNUSZ: $U_M =$ MARCIPÁNOS VEVŐK SZÁMA 8-TÓL 2-IG

$U_{ZS} =$ ZSELÉS –"– –"– –"– –"–

$V_M =$ MARCIPÁNOS –"– –"– 2-TŐL 8-IG

$V_{ZS} =$ ZSELÉS –"– –"– –"– –"–

POISSON-OK SZÍNEZÉSE MIATT:

$U_M, U_{ZS}, V_M, V_{ZS}$ F.A.E. POISSON-OK

(5. OLDAL

$\boxed{U := U_M - U_{ZS}}$ $\boxed{V := V_M - V_{ZS}}$ U, V F.A.E.

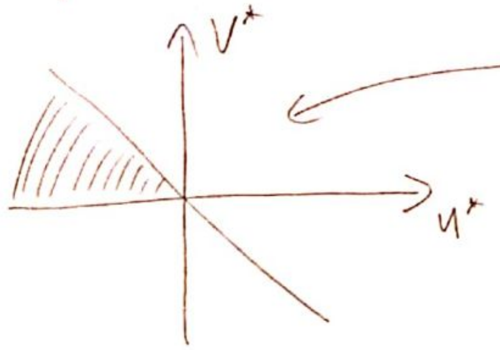
$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 0$ $U^* = U/\sqrt{Var(U)}$

$Var(U) = Var(V)$ $V^* = V/\sqrt{Var(V)}$

C.H.T. MIATT $U^*, V^*$ F.A.E. $\mathcal{N}(0,1)$-EL KÖZELÍTHETŐ

KÉRDÉSES VALÓSZÍNŰSÉG =

$= \mathbb{P}(U > 0, U + V < 0) = \mathbb{P}(U^* > 0, U^* + V^* < 0) =$




$= \mathbb{P}($KÉT DIM STANDARD NORMÁLIS A SATÍROZOTT TARTOMÁNYBA ESIK$) = \frac{1}{8}$

HISZ A 2-DIM STANDARD NORMÁLIS SZÖGE EGYENLETES ELOSZLÁSÚ, ÍGY

$\mathbb{P}($SATÍROZOTTBA ESIK$) = \frac{\text{KEDVEZŐ SZÖG}}{\text{ÖSSZ SZÖG}} = \frac{45°}{360°}$