VAL. SZÁM. 1. VIZSGA, 2024 JAN 9.

$\boxed{E1}$ a) $\forall I \subseteq [n]$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} A_i$

b) LÁSD 2022 JAN. 4 $\boxed{ELM1}$ c) MEGO.

c) $\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)} \iff \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \iff \boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)}$

$\boxed{E2}$ a) LÁSD 2021 DEC. 21 $\boxed{ELM3}$ b)

b) $G(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \begin{cases} 0 & \text{HA } y \le 0 \\ \star & \text{HA } y > 0 \end{cases}$

$\star = \mathbb{P}(X^4 \le y) = \mathbb{P}(|X| \le y^{1/4}) = \Phi(y^{1/4}) - \Phi(-y^{1/4}) =$

$= \Phi(y^{1/4}) - (1 - \Phi(y^{1/4})) = 2\cdot\Phi(y^{1/4}) - 1$

Y SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYE : $g(y) = G'(y)$

$g(y) = 0$ HA $y \le 0$

$g(y) = \frac{d}{dy}\left(2\cdot\Phi(y^{1/4}) - 1\right) = 2\cdot\varphi(y^{1/4})\cdot\frac{1}{4}\cdot y^{-3/4}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{y^{1/2}}{2}\right)\cdot y^{-3/4}$

$\boxed{E3}$ a) $M(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\cdot X}\right)$

b) $\mathbb{E}(X) = M'(0)$, $\mathbb{E}(X^2) = M''(0)$

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot x} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} \cdot f(x)\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{tx} \cdot f(x)\,dx$$, TEHÁT $M'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \mathbb{E}(X)$

c) LÁSD 2022 JAN 4 $\boxed{\text{ELM 2}}$ b)

$\boxed{\text{GYAK 1}}$ LÁSD 3. GYAKORLAT 4. FELADAT MEGO.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{5} \mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1.45$$

$\boxed{\text{GYAK 2}}$ $X \sim BIN(1000, 0.56)$

$$\mathbb{P}(X < 530) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 560}{\sqrt{1000\cdot 0.56\cdot 0.44}} < \frac{530 - 560}{\sqrt{1000\cdot 0.56\cdot 0.44}}\right) \approx$$

$\boxed{\text{DE MOIVRE}}$

$$\Phi(-1.91) = 1 - \Phi(1.91) =$$

$$1 - 0.9719 = 0.0281$$

2. OLDAL

$\boxed{\text{GY3}}$ λ_M = MACSKA POISSON FOLY INTENZITÁSA

λ_B = BETYÁR —"— —"— —"—

λ_T = TŰZ —"— —"— —"—

(MÉRTÉKEGYSÉG: NAP)

$$\boxed{\lambda_T = \frac{2}{7}} \quad \boxed{\lambda_B = 2} \quad \boxed{e^{-\lambda_M} = e^{-\lambda_M} \cdot \frac{\lambda_M}{1!}} \Rightarrow \boxed{\lambda_M = 1}$$

T = ELSŐ TŰZESET IDŐPONTJA $\boxed{T \sim EXP(\lambda_T)}$

X_B := BETYÁR-HÍVÁSOK SZÁMA T ELŐTT

X_M := MACSKA-RIASZTÁSOK —"— —"— —"—

X_E := EGYÉB HÍVÁSOK —"— —"— —"—

$$\boxed{X_E = X_M + X_B}$$

a) $\mathbb{E}(X_B \mid T = t) = \mathbb{E}(\text{POISSON}(t \cdot \lambda_B)) = \lambda_B \cdot t$

$$\mathbb{E}(X_B \mid T) = \lambda_B \cdot T \qquad \mathbb{E}(X_B) \overset{\text{TORONY}}{=\!=} \mathbb{E}(\lambda_B \cdot T) =$$

$$= \lambda_B \cdot \mathbb{E}(T) = \lambda_B \cdot \frac{1}{\lambda_T} = \frac{2}{2/7} = 7$$

$$\text{Var}(X_B \mid T = t) = \text{Var}(\text{POISSON}(t \cdot \lambda_B)) = \lambda_B \cdot t$$

$$\text{Var}(X_B \mid T) = \lambda_B \cdot T \qquad \text{Var}(X_B) \overset{\text{FELT. SZÓRÁS}^2\text{ FORM.}}{=\!=\!=\!=}$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(\text{Var}(X_B \mid T))}_{= \lambda_B / \lambda_T} + \text{Var}(\underbrace{\mathbb{E}(X_B \mid T)}_{\lambda_B \cdot T}) = \frac{\lambda_B}{\lambda_T} + (\lambda_B)^2 \cdot \text{Var}(T) =$$

3. OLDAL

$$= \frac{\lambda_B}{\lambda_T} + \frac{\lambda_B^2}{\lambda_T^2} = 7 + 7^2 = 56$$

b) $$\mathrm{Cov}(X_B, X_M) = \mathbb{E}(X_B \cdot X_M) - \underbrace{\mathbb{E}(X_B)}_{\frac{\lambda_B}{\lambda_T}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_M)}_{\frac{\lambda_M}{\lambda_T}}$$

$\mathbb{E}(X_B \cdot X_M \mid T = t) = (\lambda_B \cdot t) \cdot (\lambda_M \cdot t)$, HISZEN X_B ÉS X_M FELTÉTELESEN FÜGGETLENEK A $T=t$ FELTÉTEL MELLETT.

$$\mathbb{E}(X_B \cdot X_M \mid T) = \lambda_B \cdot \lambda_M \cdot T^2$$ $\boxed{\text{TORONY}}$

$$\mathbb{E}(X_B \cdot X_M) = \mathbb{E}(\lambda_B \cdot \lambda_M \cdot T^2) =$$
$$\lambda_B \cdot \lambda_M \cdot \mathbb{E}(T^2) = \lambda_B \cdot \lambda_M \cdot (\mathrm{Var}(T) + \mathbb{E}(T)^2) =$$
$$= \lambda_B \cdot \lambda_M \cdot \frac{2}{\lambda_T^2}$$, ÍGY $$\mathrm{Cov}(X_B, X_M) = \frac{\lambda_B \cdot \lambda_M}{\lambda_T^2} =$$
$$= \frac{2 \cdot 1}{(2/7)^2} = 24.5$$

BÓNUSZ: POISSON-OK SZÍNEZÉSE MIATT TEKINTHETÜNK ÚGY A HÁROM FÜGGETLEN POISSON-FOLYAMATUNKRA, HOGY VESSZÜK A BÁRMILYEN TELEFONHÍVÁSOK PONT-FOLYAMATÁT,

AMI EGY $\boxed{\lambda := \lambda_M + \lambda_B + \lambda_T}$ INTENZITÁSÚ POISSON-PONTFOLYAMAT, ÉS MINDEN PONTJÁT $\frac{\lambda_M}{\lambda}$ VAL.SÉGGEL „MACSKA"-RA SZÍNEZEM, $\frac{\lambda_B}{\lambda}$ VAL.SÉGGEL „BETYÁR"-RA SZÍNEZEM, $\frac{\lambda_T}{\lambda}$ — // — „TŰZ"-RE SZÍNEZEM.

TEHÁT AZON PONTOK SZÁMA, AHÁNY PONT ÉRKEZETT AZ ELSŐ TŰZESETIG, BELEÉRTVE MAGÁT AZ ELSŐ TŰZESETET IS, EGY GEO$\left(\frac{\lambda_T}{\lambda}\right)$ ELOSZLÁSÚ VAL.VÁLTOZÓ.

X_E ENNÉL 1-EL KEVESEBB.

TEHÁT $\mathbb{P}(X_E = k) = \left(1 - \frac{\lambda_T}{\lambda}\right)^k \cdot \frac{\lambda_T}{\lambda}$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = \frac{\lambda_T}{\lambda_M + \lambda_B + \lambda_T} = \frac{2/7}{1 + 2 + 2/7}$$