VAL. SZÁM 1. VIZSGA, 2024.02.09.

$\boxed{\text{ELM 1}}$ a) $\underline{\mathbb{P}(A \cup B)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$- \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

---

b) $A_i :=$ {AZ i-EDIK VENDÉG A SAJÁT KALAPJÁT VESZI FEL}

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{(n-|I|)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(\text{KÉRDÉS}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k}} (-1)^{k+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - e^{-1}$$

HISZEN $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, ÍGY $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

$\boxed{\text{ELM 2}}$

a) $A_1, A_2, \dots$ FÜGGETLEN p VALÓSZÍNŰSÉGŰ ESEMÉNYEK. LEGYEN $X = \min\{k : A_k \text{ BEKÖV.}\}$

EKKOR $X \sim GEO(p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_1^c, A_2^c, \dots, A_{k-1}^c, A_k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{t \cdot X}) = \sum_{k=1}^{\infty} (e^t)^k \cdot \mathbb{P}(X = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot e^t \cdot (e^t \cdot (1-p))^{k-1} = \frac{p \cdot e^t}{1 - e^t \cdot (1-p)} = \frac{p}{e^{-t} + p - 1}$$

HA $e^t \cdot (1-p) < 1$

$$M'(t) = \frac{-p}{(e^{-t} + p - 1)^2} \cdot (-1) \cdot e^{-t} = \frac{p \cdot e^{-t}}{(e^{-t} + p - 1)^2}$$

$$\mathbb{E}(X) = M'(0) = \frac{p}{(1 + p - 1)^2} = \frac{1}{p}$$

$$M''(t) = \frac{-p \cdot e^{-t}}{(e^{-t} + p - 1)^2} + p \cdot e^{-t} \cdot \frac{-2}{(e^{-t} + p - 1)^3} \cdot e^{-t}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = M''(0) = \frac{-1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$Var(X) = M''(0) - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

$\boxed{\text{ELM 2}}$

b) N GOLYÓ EGY URNÁBAN:
K PIROS, N−K KÉK.
KIHÚZUNK n GOLYÓT VISSZATEVÉS NÉLKÜL.
LEGYEN X A KIHÚZOTT PIROS GOLYÓK SZÁMA.
EKKOR X HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁSÚ.
EKKOR HA $k \geq 0$, $k \geq n-(N-K)$
$k \leq n$, $k \leq K$, AKKOR

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

LEGYEN $X_i = \mathbb{1}[i\text{-EDIK HÚZÁS PIROS}]$

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\cdot\mathbb{E}(X_1) = n\cdot\frac{K}{N}$$

<u>BÓNUSZ:</u> $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}(X_i\cdot X_j) =$

$$= n\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{K/N} + n\cdot(n-1)\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X_1\cdot X_2)}_{\frac{K}{N}\cdot\frac{K-1}{N-1}} = n\cdot\frac{K}{N}\cdot\left(1+(n-1)\cdot\frac{K-1}{N-1}\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - n^2\cdot\frac{K^2}{N^2} = n\cdot\frac{K}{N}\cdot\left(1+(n-1)\cdot\frac{K-1}{N-1} - n\cdot\frac{K}{N}\right)$$

3. OLDAL

CamScannerrel szkennelve

$\boxed{\text{ELM 3}}$

LEGYENEK $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots$ F.A.E. VA.VÁ.
LEGYEN N FÜGGETLEN TŐLÜK.

$$\boxed{\mathbb{X} = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{X}_k}$$ ← VÉLETLEN TAGSZÁMÚ ÖSSZEG.

$m := \mathbb{E}(\mathbb{X}_1)$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(\mathbb{X}_1)$

$\tilde{m} := \mathbb{E}(N)$, $\tilde{\sigma}^2 := \mathrm{Var}(N)$

TORONY

$\mathbb{E}(\mathbb{X} \mid N) = N \cdot m$, ÍGY $\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{X} \mid N)) =$
$= \mathbb{E}(N \cdot m) = m \cdot \mathbb{E}(N) = m \cdot \tilde{m}$

$\mathrm{Var}(\mathbb{X} \mid N) = N \cdot \sigma^2$, ÍGY

$\mathrm{Var}(\mathbb{X}) \xlongequal{\text{FELT. SZÓRÁS } \square} \mathbb{E}(\mathrm{Var}(\mathbb{X} \mid N)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\mathbb{X} \mid N))$
$= \mathbb{E}(N \cdot \sigma^2) + \mathrm{Var}(N \cdot m) =$
$= \sigma^2 \cdot \mathbb{E}(N) + m^2 \cdot \mathrm{Var}(N) = \sigma^2 \cdot \tilde{m} + m^2 \cdot \tilde{\sigma}^2$

GYAK 1

$\mathbb{X} = \underbrace{\text{KOCC. BALESETEK SZÁMA}}$ EGY NAP

$\mathbb{Y} =$ — " — AMIKOR KIHÍVJÁK $\underbrace{\text{A RENDŐRÖKET UGYANAZNAP}}$

$Z =$ — " — AMIKOR NEM HÍVJÁK KI — " —

---

a) $\mathbb{X} \sim POI(10)$, BINOMIÁLIS EO. POISSON APPROXIMÁCIÓJA MIATT: SOK KÖZLEKEDÉSI SZITUÁCIÓ, AMIK EGYMÁSTÓL FÜGGETLENÜL KIS VALÓSZÍNŰSÉGGEL VEZETNEK BALESETHEZ.

b) $\mathbb{Y} \sim POI(4)$ (POISSON RITKÍTÁSA)

$$\mathbb{P}(\mathbb{Y} \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!} = 0.762$$

c) $\mathbb{X} = \mathbb{Y} + Z_1$, $Z_1 \sim POI(6)$, VALAMINT $\mathbb{Y}$ ÉS Z_1 FÜGGETLENEK (POISSON SZÍNEZÉSE)

$$\mathbb{P}(\mathbb{X} = 10 \mid \mathbb{Y} = 5) = \mathbb{P}(Z_1 = 5 \mid \mathbb{Y} = 5) \overset{\text{FÜGGETLEN}}{=}$$

$$= \mathbb{P}(Z_1 = 5) = e^{-6} \cdot \frac{6^5}{5!} = 0.16$$

(5. OLDAL

$\boxed{\text{GYAK 2}}$

a) $f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx = e^{-y} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot e^{-x \cdot \frac{1}{y}}\,dx}_{1} = e^{-y}$

HISZEN AZ $EXP\left(\frac{1}{y}\right)$ SŰRŰSÉG-
FÜGGVÉNYÉT INTEGRÁLJUK

TEHÁT $\boxed{Y \sim EXP(1)}$

$\boxed{\text{HA } x>0,\ y>0}$

b) $\mathbb{E}(Y) = 1$

c) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y} \cdot e^{-x \cdot \frac{1}{y}}$

TEHÁT X FELTÉTELES ELOSZLÁSA $EXP\left(\frac{1}{y}\right)$
AZ $Y = y$ FELTÉTEL MELLETT.

d) $\mathbb{E}(X | Y = y) \overset{c)}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y$

$\mathbb{E}(X|Y) = Y$

$\mathbb{E}(X) \overset{\text{TORONY}}{=\!=\!=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(Y) = 1$

$\boxed{\text{GYAK 3}}$ X = LEKÉSÉSEK IDÉN ODAFELÉ

Y = — " — — " — HAZAFELÉ

$\boxed{Z_1 := Y - X}$ $X = X_1 + \dots + X_{220}$ AHOL

$Y = Y_1 + \dots + Y_{220}$

$X_i = \mathbb{1}$[i-EDIK NAPON ODAFELÉ LEKÉSI]

$Y_i = \mathbb{1}$[— " — HAZAFELÉ — " —]

$X_i \sim BER\left(\frac{1}{5}\right)$, $Y_i \sim BER\left(\frac{1}{4}\right)$ FÜGGETLENEK

a) $X \sim BIN\left(220, \frac{1}{5}\right)$

$\boxed{\text{DE MOIVRE}}$

$$\mathbb{P}(X \geq 40) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 220 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{220 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}} \geq \frac{40 - 220 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{220 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right) \approx$$

$$\mathbb{P}\left(\overset{N(0,1)}{Y} \geq \frac{40 - 220 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{220 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right) = 1 - \Phi(-0.6742) =$$

$$= \Phi(0.6742) \overset{\text{TÁBLÁZAT}}{=\!=} 0.7486$$

b) $Z_i := Y_i - X_i$, $Z_1 = Z_{1,1} + \dots + Z_{1,220}$

$$\mathbb{E}(Z_{1,i}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \quad Var(Z_{1,i}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \overbrace{0.3475}^{\sigma^2}$$

$$\mathbb{P}(Z_1 > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 - 220 \cdot \frac{1}{20}}{\sqrt{220 \cdot \sigma^2}} > \frac{-220 \cdot \frac{1}{20}}{\sqrt{220 \cdot \sigma^2}}\right) \overset{\text{C.H.T}}{=\!=}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-220 \cdot \frac{1}{20}}{\sqrt{220 \cdot \sigma^2}}\right) = \Phi(1.258) = 0.8962$$

7. OLDAL

CamScannerrel szkennelve