

(A) CSOPORT (VSZ 1, ELSŐ ZH, 2022 OKT 20)

① a) ② $P(Y \text{ páratlan}) = \left(\frac{5}{9}\right)^5 = 0.052922$

b) ⑧ $P(70 | Y) = 1 - P(70 \uparrow Y)$ $A_i := \{i \uparrow Y\}$

$P(70 \uparrow Y) = P(A_2 \cup A_5 \cup A_7) \stackrel{\leftarrow \text{SZITA FORMULA}}{=} \left(\frac{5}{9}\right)^5 + \left(\frac{8}{9}\right)^5 + \left(\frac{8}{9}\right)^5 - \left(\frac{4}{9}\right)^5 - \left(\frac{4}{9}\right)^5 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 + \left(\frac{3}{9}\right)^5 = 0.8476$

$P(70 | Y) = 0.1524$

② KUKAC / KG PARAMÉTER: $\frac{1}{3}$

AVAS / KG PARAMÉTER: $e^{-\lambda \cdot 4} = 0.135 \dots \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

a) ④ $P(\text{POI}(4) \geq 2) = 1 - e^{-4} - e^{-4} \cdot 4 = 0.9084$

b) ⑥ $e^{-(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \cdot x} \geq 0.7 \Leftrightarrow \ln(0.7) \leq -\frac{5}{6} \cdot x \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{1}{0.7}\right) \geq \frac{5}{6} x \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5} \cdot \ln\left(\frac{1}{0.7}\right) = 0.428$

BÓNUSZ: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \leq 100$ \star

④ $\ln(N+1) \leq H_N \leq \ln(N+1) + 1$

KB: $N = e^{100}$

$\star \Leftrightarrow$ KASZINÓ VÁRHATÓ NYEREMÉNYE NEM NEGATÍV \Leftrightarrow

\Leftrightarrow REKORDOK SZÁMÁNAK VÁRHATÓ ÉRTÉKE ≤ 100 .

UGYANIS: HA $X'_k := \mathbb{1}[k\text{-ADIK POZÍCIÓN REKORDÉ A TÉY ÁLL}]$

$E(\text{REKORDOK SZÁMA}) = E(X'_1 + \dots + X'_N) = E(X'_1) + \dots + E(X'_N)$

$E(X'_k) = P(k\text{-ADIK POZ. REKORD}) = \frac{1}{k}$

B) CSOPORT:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & P(\text{HARMADIK} = 1 \mid \text{ECSŐ KETTŐBŐC PONTOSAN EGY 1}) = \\ \textcircled{10} \quad & \frac{(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}) \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8}) \cdot \frac{1}{3}}{(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}) \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}) \cdot \frac{1}{3}} = \\ & \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}} = \frac{0.083695}{0.435763} = \\ & = \boxed{0.192} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{a) } P(\text{A NYER AZ ECSŐ FORDULÓBAN}) = 4 \cdot p \cdot (1-p)^3$$

$$\textcircled{6} \quad P(\text{B NYER}) = 4 \cdot (1-p) \cdot p^3$$

$$4 \cdot p \cdot (1-p)^3 = 2 \cdot 4 \cdot (1-p) \cdot p^3$$

$$(1-p)^2 = 2 \cdot p^2$$

$$1 - 2p + p^2 = 2p^2$$

$$1 - 2p = p^2$$

$$p^2 + 2p - 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{\sqrt{8}-2}{2} = \sqrt{2}-1$$

$p > 0$

$$\boxed{p = \sqrt{2} - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{b) } q := P(\text{A VAGY B NYER}) = 3 \cdot 4 \cdot (1-p) \cdot p^3 = 0.49956$$

$$X := \text{FORDULÓK SZÁMA}, X \sim \text{GEO}(q), E(X) = \frac{1}{q} = \underline{2.00176}$$

BÓNUSZ: $\textcircled{4}$ LA'SD \textcircled{A} CSOP. MEGO.