2023.10.19. A CSOPORT

① a) $\mathbb{P}(\text{MINDHÁROM ÉGVE MARAD}) = \dfrac{\binom{27}{10}}{\binom{30}{10}}$

b) $\mathbb{P}(\text{SÖTÉT}) = \dfrac{\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}}$

c) $A_i := \{i\text{-EDIK TEREM SÖTÉTSÉGBE BORUL}\}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,10\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = ✪$$

$|I| = 1 \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \dfrac{\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}}$

$|I| = 2 \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \dfrac{\binom{24}{4}}{\binom{30}{10}}$

$|I| = 3 \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \dfrac{21}{\binom{30}{10}}$

$|I| > 3 \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = 0$

$$✪ = 10 \cdot \frac{\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{\binom{24}{4}}{\binom{30}{10}} + \binom{10}{3} \cdot \frac{21}{\binom{30}{10}}$$, ÍGY

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right) = 1 - 10 \cdot \frac{\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}} + \binom{10}{2} \cdot \frac{\binom{24}{4}}{\binom{30}{10}} - \binom{10}{3} \cdot \frac{21}{\binom{30}{10}}$$

2023.10.19. A CSOPORT

(2) X := EGY NAP ALATT ÉRKEZŐ SZÁMÍTÁSI FELADATOK SZÁMA

$X \sim POI(\lambda)$ (SOK DOLGOZÓ KIS VAL.SÉGGEL KÜLD FELADATOT, BINOMIÁLIS EO. POI. KÖZELÍTÉSE)

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{20} \iff e^{-\lambda} = \frac{1}{20} \iff \boxed{\lambda = \ln(20)}$

a) $\mathbb{P}(X=4) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^4}{4!} = \frac{1}{20} \cdot \frac{(\ln(20))^4}{4!}$

b) $\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{20} \cdot \frac{\ln(20)^k}{k!}$

BÓNUSZ: $\mathbb{P}(X$ OSZTHATÓ 4-EL$) = (\star)$

$\mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot z^k = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = \exp(\lambda \cdot (z-1))$.

$\mathbb{1}[k$ OSZTHATÓ 4-EL$] = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + (-1)^k + (i)^k + (-i)^k\right)$

(AHOL $i = \sqrt{-1}$, KOMPLEX EGYSÉGGYÖK)

$(\star) = \mathbb{E}(\mathbb{1}[X$ OSZTHATÓ 4-EL$]) =$

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{4} \cdot \left(1 + (-1)^X + (i)^X + (-1)^X\right)\right) \underset{\text{LINEARITÁS}}{=}$

$\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \exp(\lambda \cdot ((-1)-1)) + \exp(\lambda \cdot (i-1)) + \exp(\lambda \cdot (-i-1))\right) =$

$\frac{1}{4} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda} + (\cos(\lambda) + i \cdot \sin(\lambda)) \cdot e^{-\lambda} + (\cos(\lambda) - i \cdot \sin(\lambda)) \cdot e^{-\lambda}\right)$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda} + 2 \cdot \cos(\lambda) \cdot e^{-\lambda}\right)$

2. OLDAL

2023. 10. 19. B CSOPORT

1) a) $\mathbb{P}$(VOLT SÁNTA) =

$$\underbrace{\mathbb{P}(\text{VOLT SÁNTA} \mid \text{JOE})}_{1-(0.9)^2} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\text{JOE})}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\mathbb{P}(\text{VOLT SÁNTA} \mid \text{DONALD})}_{1-(0.8)^2} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(D)}_{\frac{1}{2}}$$

$= 0.275$

b) $\mathbb{P}(\text{DONALD} \mid \text{VOLT SÁNTA}) = \dfrac{(1-(0.8)^2) \cdot \frac{1}{2}}{0.275} = 0.654$

$\mathbb{P}(\text{JOE} \mid \text{VOLT SÁNTA}) = 1 - 0.654 = 0.346$

c.) $\mathbb{P}(\text{DONALD} \mid \text{NEM VOLT SÁNTA}) = \dfrac{\mathbb{P}(D, \text{NINCS SÁNTA})}{\mathbb{P}(\text{NINCS SÁNTA})} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0.8)^2}{\frac{1}{2} \cdot (0.8)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0.2)^2} = 0.441$$

$\mathbb{P}(\text{JOE} \mid \text{NEM VOLT SÁNTA}) = 1 - 0.441 = 0.559$

d) $\mathbb{P}$(MÁSODIK HETI LOVA SÁNTA) =

$\frac{1}{2} \cdot (1-(0.8)^2) \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot (0.8)^2 \cdot 0.2 + \frac{1}{2} \cdot (1-(0.9)^2) \cdot 0.2 +$

$\frac{1}{2} \cdot (0.9)^2 \cdot 0.1 = 0.1415$

2023. 10. 19. B CSOPORT

(2) a) X = MEGJELENT TULAJDONOSOK SZÁMA

$X \sim BIN(5, \frac{2}{3})$

$p = \mathbb{P}(\text{SZAVAZATKÉPES}) = \mathbb{P}(X \geq 3) =$

$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0{,}7901$

b) $Y :=$ $\underbrace{\text{LAKÓGYŰLÉSEK SZÁMA JÖVŐRE}}$

$Z_1 :=$ SZAVAZATKÉPTELEN —"—

$\boxed{Y = 12 + Z_1}$ $\quad Z_1 \sim BIN(12, 1-p)$

$\mathbb{E}(Y) = 12 + \mathbb{E}(Z_1) = 12 + 12 \cdot (1-p) = \underbrace{24 - 12 \cdot p}_{\approx 14.52}$

BÓNUSZ: $U :=$ ARÁNY 18.00-TÓL KEZDŐDŐ LAKÓGYŰLÉST ÜLÖK VÉGIG, MIELŐTT EGY 16.15-KOR KEZDŐDŐ LAKÓGYŰLÉST VÉGIGÜLÖK.

EKKOR $U \sim GEO(q)$, AHOL

$q = \mathbb{P}(\text{LEGFELJEBB EGY MÁSIK TUL. JÖN EL} \mid \text{ÉN ELJÖVÖK})$

$= \mathbb{P}(X^* \leq 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$, TEHÁT

$X^* \sim BIN(4, \frac{2}{3})$ $\quad \mathbb{E}(U) = \frac{1}{q} = 9$