Valószínűségszámítás 2. ZH 2021/22

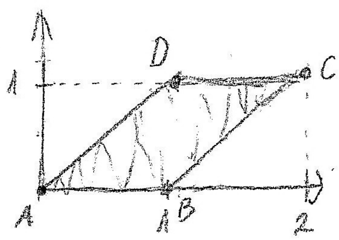
A csoport

1. $Ho, Jü, Jö \sim \mathcal{N}(30, 4^2)$, $S \sim \mathcal{N}(100, 4^2)$ függetlenek

$$\mathbb{P}(Ho + Jü + Jö > S) = \mathbb{P}(0 > \underbrace{S - Ho - Jü - Jö}_{X}) = \mathbb{P}(X<0) = \mathbb{P}\left(\frac{X-10}{8} < \frac{-10}{8}\right) =$$

$X \sim \mathcal{N}(100 - 3\cdot 30, 4\cdot 4^2) = \mathcal{N}(10, 8^2)$, hiszen ftn normálisok lin. kombinációja normális

$$= \Phi\left(-\frac{10}{8}\right) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = \underline{\underline{0{,}1056}}$$

2. 

$T_{ABCD} = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{T_{ABCD}} & \text{ha } (x,y) \in ABCD \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le x \\ 1 & \text{ha } 1 \le x \le 2 \text{ és } x-1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^x 1\,dy & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ \int_{x-1}^1 1\,dy & \text{ha } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

3. $A_i := \{ i.$ játékos 2 petákot kap $\}$ $\quad 1 \le i \le 30$

$\xi_i := \mathbb{1}[A_i] \Rightarrow \xi = \sum_{i=1}^{30} \xi_i$

$$\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{30} \xi_i\right] \overset{v.é. lin.}{=} \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}[\xi_i] = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}[\mathbb{1}[A_i]] = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{P}(A_i) = 30 \cdot \mathbb{P}(A_1) = 30 \cdot \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{3{,}33}},$$

hiszen $\mathbb{P}(A_i) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$, mert az i. akkor kap 2 petákot, ha az $(i-1, i, i+1)$: (papír, olló, papír) vagy (olló, kő, olló) vagy (kő, papír, kő) -t mutatott

Bónusz: $\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{30} \xi_i, \sum_{j=1}^{30} \xi_j\right) \overset{bilin}{=} \sum_{i,j=1}^{30} \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j)$

- ha $i=j$: $\mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_i) = \mathrm{Var}(\xi_i) = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{81}$
- ha $j = i+1$ (vagy $i = 30$, $j = 1$): $\mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}[\xi_i \xi_{i+1}] - \mathbb{E}[\xi_i]\mathbb{E}[\xi_j]$

$\mathbb{E}[\xi_i \xi_{i+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}[A_i]\mathbb{1}[A_{i+1}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}[A_i \cap A_{i+1}]] = \mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1}) = 0$, hiszen az i. és $i+1$-nek egyszerre kéne legyőznie $\Rightarrow \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 - \frac{1}{81} = -\frac{1}{81}$

• ha $j=i-1$ (vagy $i=1,\ j=30$): $\quad \mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = -\frac{1}{81}$

• ha $j=i+2$ (vagy $i=30,\ j=2$ vagy $i=29,\ j=2$):

$$E[\xi_i \xi_{i+2}] = \mathbb{P}(A_i \cap A_{i+2}) = \frac{3}{3^5} = \frac{1}{81}$$

$$\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = E[\xi_i \xi_{i+2}] - E[\xi_i]E[\xi_{i+2}] = \frac{1}{81} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 0$$

	i		$i+2$	
K	P	K	P	K
O	K	O	K	O
P	O	P	O	P

• ha $j=i-2$ (vagy $i=1,\ j=29$ vagy $i=2,\ j=30$):
$\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)=0$

• ha az i. és j. ember között legalább 2 ember ül $\Rightarrow$ ξ_i és ξ_j függetlenek $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)=0$

Tehát $\mathrm{Var}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{30} \mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = 30\cdot\frac{8}{81} + 2\cdot 30\left(-\frac{1}{81}\right) + (900-90)\cdot 0 = \frac{20}{9} \approx 2{,}22$

így a szórás: $\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \approx 1{,}49$