Valószínűségszámítás ZH1 pótlása, 2020. dec. 11. 14:15 – 15:00

Az elérhető maximum (a bónusz feladattal együtt): 24 pont, de már 20 pont is 100%-os eredménynek számít.

Az egyes feladatokat nem feltétlenül kell külön lapra írni, de legyen egyértelmű, hogy melyik megoldás melyik feladathoz tartozik. Kérem, hogy minden lap tetejére írja fel a nevét és a Neptun kódját.

A megoldásairól készített fényképeket **egyetlen**, (szükség szerint több oldalas), **legfeljebb 5 MByte méretű pdf** fájlban töltse fel a házi feladatokhoz is használt, Önnel egyénileg megosztott **Onedrive** mappába. A feltöltésre a zh-t követő 10 perc áll rendelkezésre, azaz ezt **15:10-ig** kell megtennie.

Kérem, hogy a dolgozat elejére jegyezze fel és írja alá a következő mondatot:
„Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül készítem el."

1. Egy vírusfertőzés a populáció 10%-át érinti. A fertőzöttség tesztelésére elsődlegesen egy antigén gyorstesztet használnak. Az antigén teszt 0.8 effektivitású (ekkora valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget, ha az tényleg jelen van) és 0.01 eséllyel ad fals pozitív eredményt (ekkora valószínűséggel mutat fertőzöttséget egy egészséges ember esetén).
(a) Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén teszt negatív eredményt ad. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (6 pont)
(b) Egy tesztelési eljárás célja, hogy minél biztosabban elkülönítse a fertőzötteket. Ezért negatív antigén teszt esetén még egy 24 órás PCR tesztet is alkalmaznak. A PCR teszt 0.98 effektivitású és 0.07 eséllyel ad fals pozitív eredményt. Az egyes tesztek függetlennek tekinthetőek. Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén és a PCR teszt eredménye is negatív. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (4 pont)

2. Egy vírusfertőzés a populáció 15%-át érinti. A fertőzöttség tesztelésére elsődlegesen egy antigén gyorstesztet használnak. Az antigén teszt 0.75 effektivitású (ekkora valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget, ha az tényleg jelen van) és 0.005 eséllyel ad fals pozitív eredményt (ekkora valószínűséggel mutat fertőzöttséget egy egészséges ember esetén).
(a) Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén teszt negatív eredményt ad. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (6 pont)
(b) Egy tesztelési eljárás célja, hogy minél biztosabban elkülönítse a fertőzötteket. Ezért negatív antigén teszt esetén még egy 24 órás PCR tesztet is alkalmaznak. A PCR teszt 0.99 effektivitású és 0.06 eséllyel ad fals pozitív eredményt. Az egyes tesztek függetlennek tekinthetőek. Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén és a PCR teszt eredménye is negatív. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (4 pont)

3. Egy vírusfertőzés a populáció 20%-át érinti. A fertőzöttség tesztelésére elsődlegesen egy antigén gyorstesztet használnak. Az antigén teszt 0.8 effektivitású (ekkora valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget, ha az tényleg jelen van) és 0.005 eséllyel ad fals pozitív eredményt (ekkora valószínűséggel mutat fertőzöttséget egy egészséges ember esetén).
(a) Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén teszt negatív eredményt ad. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (6 pont)
(b) Egy tesztelési eljárás célja, hogy minél biztosabban elkülönítse a fertőzötteket. Ezért negatív antigén teszt esetén még egy 24 órás PCR tesztet is alkalmaznak. A PCR teszt 0.98 effektivitású és 0.06 eséllyel ad fals pozitív eredményt. Az egyes tesztek függetlennek tekinthetőek. Tegyük fel, hogy egy, a populációból véletlenszerűen választott személy esetén az antigén és a PCR teszt eredménye is negatív. Mi a valószínűsége, hogy ez a személy fertőzött? (4 pont)

4. Andrásnak, Bélának és Csabának van egy-egy pénzérméje. Andrásé szabályos, Béláé $\frac{1}{3}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{2}{3}$ eséllyel az Írás oldalára, míg Csabáé $\frac{2}{3}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{1}{3}$ eséllyel az Írás oldalára. Az urak feldobják a három érmét. Ha ezek közül kettő azonos oldalára esik, a harmadik pedig az ettől különböző oldalra, akkor az nyer közülük, akinek nincs párja. (Tehát pl: András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Fej esetén Béla nyer. Vagy András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Írás esetén András nyer.) Ha a három érme azonos oldalára esik, akkor újra dobnak, egészen addig, amíg valamelyikük nem nyer. Az alábbi kérdésekre konkrét számértékeket várunk válaszul, és nem egy végtelen szummát.
(a) Számoljuk ki, hogy milyen valószínűséggel ér véget a játék András, Béla illetve Csaba győzelmével. (6 pont)
(b) Jelölje X, hogy hány dobás után ér véget a játék. Határozza meg X várható értékét (4 pont).

5. Andrásnak, Bélának és Csabának van egy-egy pénzérméje. Andrásé szabályos, Béláé $\frac{1}{4}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{3}{4}$ eséllyel az Írás oldalára, míg Csabáé $\frac{3}{4}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{1}{4}$ eséllyel az Írás oldalára. Az urak feldobják a három érmét. Ha ezek közül kettő azonos oldalára esik, a harmadik pedig az ettől különböző oldalra, akkor az nyer közülük, akinek nincs párja. (Tehát pl: András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Fej esetén Béla nyer. Vagy András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Írás esetén András nyer.) Ha a három érme azonos oldalára esik, akkor újra dobnak, egészen addig, amíg valamelyikük nem nyer. Az alábbi kérdésekre konkrét számértékeket várunk válaszul, és nem egy végtelen szummát.
(a) Számoljuk ki, hogy milyen valószínűséggel ér véget a játék András, Béla illetve Csaba győzelmével. (6 pont)
(b) Jelölje X, hogy hány dobás után ér véget a játék. Határozza meg X várható értékét (4 pont).

6. Andrásnak, Bélának és Csabának van egy-egy pénzérméje. Andrásé szabályos, Béláé $\frac{1}{5}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{4}{5}$ eséllyel az Írás oldalára, míg Csabáé $\frac{4}{5}$ eséllyel esik a Fej, és $\frac{1}{5}$ eséllyel az Írás oldalára. Az urak feldobják a három érmét. Ha ezek közül kettő azonos oldalára esik, a harmadik pedig az ettől különböző oldalra, akkor az nyer közülük, akinek nincs

párja. (Tehát pl: András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Fej esetén Béla nyer. Vagy András: Fej, Béla: Írás, Csaba: Írás esetén András nyer.) Ha a három érme azonos oldalára esik, akkor újra dobnak, egészen addig, amíg valamelyikük nem nyer. Az alábbi kérdésekre konkrét számértékeket várunk válaszul, és nem egy végtelen szummát.

(a) Számoljuk ki, hogy milyen valószínűséggel ér véget a játék András, Béla illetve Csaba győzelmével. (6 pont)

(b) Jelölje X, hogy hány dobás után ér véget a játék. Határozza meg X várható értékét (4 pont).

Bónusz A Mikulás óriási adag diákcsemegét készít, amibe jól belekever rengeteg mazsolát, és a diákcsemegéből minden gyereknek egy 200g-os csomagot állít össze. Annak valószínűsége, hogy egy ekkora csomagba egyáltalán ne kerüljön mazsola, kb. 0.0183. Egy négygyerekes családnál a Mikulás az egyszerűség kedvéért egy 1 kg-os csomagot ad a négy gyereknek egyszerre. Mi a valószínűsége, hogy egy ilyen 1 kg-os csomagban a mazsolák száma osztható néggyel? Egy konkrét számértéket várunk, és nem egy végtelen szummát. (4 pont)