matrixparab

2020. november 28., szombat 17:49

1. Tekintsük az $M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ mátrixot, ahol az α és a β együtthatók függetlenek, és egyaránt egyenletes eloszlásúak a $[-1, 1]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy $\det M > 0$? (7 pont)

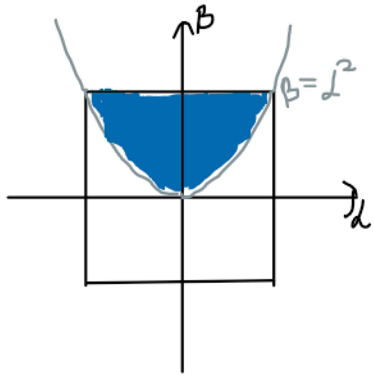
$\alpha, \beta \sim \text{Unif}\,[-1,1]$, függetlenek $\Rightarrow$

$(\alpha, \beta) \sim \text{Unif}\,[-1,1]^2$

$$P(\det M > 0) = P(\beta - \alpha^2 > 0) = \frac{t(\text{kék})}{t([0,1]^2)}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1-\alpha^2)\, d\alpha = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{3}\left[\alpha^3\right]_{-1}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$



matrixhipe

2020. november 28., szombat 17:49

2. Tekintsük az $M = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ mátrixot, ahol az α és a β együtthatók függetlenek, és egyaránt egyenletes eloszlásúak a $[0, 2]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy $\det M > 0$? (7 pont)

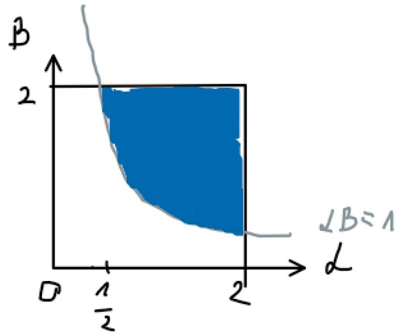
$\alpha, \beta \sim \text{Unif } [0,2]$, függetlenek $\Rightarrow$

$(\alpha, \beta) \sim \text{Unif } [0,2]^2$

$\mathbb{P}(\det M > 0) = \mathbb{P}(\alpha\beta - 1 > 0) = \dfrac{t(\text{kék})}{t([0,1]^2)}$

$= \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx =$

$= \dfrac{1}{4} \Big[2x - \log x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\log 2}{2} \approx 0{,}4034$



Telek+2

2020. november 28., szombat 17:50

3. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Egy telek egy 1 egység oldalhosszú négyzetből és egy ettől diszjunkt téglalapból áll, melynek oldalhosszai ξ és $(\xi+2)$. Jelölje η a telek területét. Határozza meg az η valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. (7 pont)

(ha $r \le 0$: $F_\eta(r) = 0$, ha $r > 0$:)

$$F_\eta(r) = P(\eta < r) = \mathbb{P}(1 + \xi(\xi+2) < r) = \mathbb{P}(\xi^2 + 2\xi + 1 - r < 0) =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{-1-\sqrt{r} < \xi}_{\text{automatikus}} < -1+\sqrt{r}) = F_\xi(-1+\sqrt{r}) = \begin{cases} 0, \text{ ha } & r < 1 \\ -1+\sqrt{r}, \text{ ha } & 1 \le r \le 4 \\ 1, \text{ ha } & r > 4 \end{cases}$$

Telek+4

2020. november 28., szombat 17:50

4. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Egy telek egy 2 egység oldalhosszú négyzetből és egy ettől diszjunkt téglalapból áll, melynek oldalhosszai ξ és $(\xi+4)$. Jelölje η a telek területét. Határozza meg az η valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. (7 pont)

$\left(\text{ha } r \leq 0:\ F_\eta(r) = 0,\ \text{ha } r > 0:\right)$

$$F_\eta(r) = \mathbb{P}(\eta < r) = \mathbb{P}(2^2 + \xi(\xi+4) < r) = \mathbb{P}(\xi^2 + 4\xi + 4 - r < 0) =$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{-2-\sqrt{r} < \xi}_{\text{automatikus}} < -2+\sqrt{r}) = F_\xi(-2+\sqrt{r}) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } r < 4 \\ -2+\sqrt{r} & \text{, ha } 4 \leq r \leq 9 \\ 1 & \text{, ha } r > 9 \end{cases}$$

Ásv.szegény

2020. november 28., szombat 17:51

5. Egy üveg ásványvízben a nátrium mennyiségének várható értéke 37 mg, szórása 3 mg, a kalcium mennyiségének várható értéke 58 mg, szórása 4 mg. Az egyes mennyiségek függetlenek és normális eloszlásúak. Egy adott üveg ásványvíz szegény ásványi anyagokban, ha a nátrium és a kalcium együttes mennyisége nem éri el az a mg-t. Mennyi lehet a, ha annak valószínűsége, hogy egy üveg víz szegény ásványi anyagokban, 0.1? Standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon! (7 pont)

X := nátrium mennyisége $X \sim N(37, 3^2)$

Y := kalcium mennyisége $Y \sim N(58, 4^2)$

$\Rightarrow Z := X + Y \sim N(95, 5^2)$

$$0{,}1 = \mathbb{P}(Z < a) = \left(\frac{Z-95}{5} < \frac{a-95}{5}\right) = \Phi\left(\frac{a-95}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{95-a}{5}\right)$$

$$\frac{95-a}{5} = \Phi^{-1}(0{,}9) \approx 1{,}28$$

$a \approx 88{,}6$

Ásv_különbség

2020. november 28., szombat 17:51

6. Egy üveg ásványvízben a nátrium mennyiségének várható értéke 35 mg, szórása 6 mg, a kalcium mennyiségének várható értéke 55 mg, szórása 8 mg. Az egyes mennyiségek függetlenek és normális eloszlásúak. Mi a valószínűsége, hogy az üvegben több kalcium van, mint nátrium? Standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon! (7 pont)

$X :=$ nátrium mennyisége $\quad X \sim \mathcal{N}(35, 6^2)$

$Y :=$ kalcium mennyisége $\quad Y \sim \mathcal{N}(55, 8^2)$

$Z := X - Y \sim \mathcal{N}(-20, 10^2)$

$$\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(0 > X - Y) = \mathbb{P}\left(\frac{X - Y - (-20)}{10} < \frac{20}{10}\right) = \Phi(2) \approx 0{,}9772$$

járvány

2020. november 28., szombat 17:51

7. A járványhelyzetre tekintettel 100 egymást követő héten, a hétnek csak az egyik, véletlenszerűen választott munkanapján mehetek az egyetemre, a másik négy munkanapon az órákon távoktatásban veszek részt. A hétfő a kedvencem, mert akkor van a valószínűségszámítás előadás. Mi a valószínűsége, hogy a 100 valszám előadásból legalább 25-ön személyesen is részt vehetek? Használjon normális közelítést, standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon! (7 pont)

X := előadások száma, amin személyesen vettem részt

$X \sim Bin(100, \frac{1}{5})$ $\mathbb{E}X = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20$, $\mathbb{D}^2X = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 16$

$$\mathbb{P}(X > 24{,}5) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{X-20}{4}} > \frac{24{,}5-20}{4}\Big) = 1 - \Phi(1{,}125) \approx 1 - 0{,}8676 =$$

de Moivre–Laplace miatt $N(0,1)$-gyel közelíthető

$= 0{,}1324$

Megj: persze a következők is jók

$\mathbb{P}(X > 24) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$

$\mathbb{P}(X \geq 25) = 1 - \Phi(1{,}25) \approx 0{,}1056$

csoki

2020. november 28., szombat 17:51

8. A RANDOM szeletek, egymástól függetlenül, 1/2 − 1/2 valószínűséggel lehetnek étcsokisak vagy tejcsokisak. Mivel a csomogaláson nem látszik a szelet fajtája, veszek 400-t, abban bízva, hogy ezek között lesz legalább 185 étcsokis. Mi a valószínűsége, hogy ez a vágyam teljesül? Használjon normális közelítést, standard normális eloszlás táblázat a következő oldalon! (7 pont)

$X :=$ étcsokis szeletek száma

$X \sim Bin\left(400, \frac{1}{2}\right)$ $\quad \mathbb{E}X = 200 \quad \mathbb{D}^2 X = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 100$

$$\mathbb{P}(X > 184{,}5) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X-200}{10}}_{} > \frac{184{,}5-200}{10}\right) \approx 1 - \phi(-1{,}55) =$$

de Moivre-Laplace miatt $N(0,1)$-gyel közelíthető

$= \phi(1{,}55) \approx 0{,}9394$

Megj: persze a következők is jók:

$\mathbb{P}(X > 184) \approx \phi(1{,}6) \approx 0{,}9452$

$\mathbb{P}(X \geq 185) \approx \phi(1{,}5) \approx 0{,}9332$

zh

2020. november 28., szombat 17:52

9. Egy 50 fős egyetemi évfolyam távoktatásban tartott zárthelyijére 100 különböző feladatsort állítanak össze az oktatók, majd az egyes hallgatóknak egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással választanak ezek közül. Jelölje X, hogy a 100 feladatsorból összesen hány kerül felhasználásra (tehát például abban a nagyon kis valószínűségű esetben, amikor minden hallgató ugyanazt a feladatsort kapja, $X = 1$.) Határozza meg X várható értékét (6 pont).
Bónusz: Határozza meg X szórásnégyzetét (4 pont).

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i, \quad X_i = \mathbb{1}[A_i]$$

$A_i = \{$ i-EDIK FELADATSOR FELHASZNÁLÁSRA KERÜL $\}$

$$\boxed{\mathbb{E}(X)} \overset{\text{LIN}}{=} \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{100} \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{= 1-\underbrace{\mathbb{P}(A_i^c)}_{\left(1-\frac{1}{100}\right)^{50} =: p = 0.395}} = 100 \cdot (1-p) = \boxed{39.5}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i, \sum_{j=1}^{100} X_j\right) \overset{\text{BIL.}}{=} \sum_{i,j=1}^{100} \text{Cov}(X_i, X_j) = ☺$$

$$\boxed{i=j}: \text{Cov}(X_i, X_j) = (1-p)\cdot(1-(1-p)) = p\cdot(1-p) =: \alpha$$

$$\boxed{i \neq j}: \text{Cov}(X_i, X_j) = \underbrace{\mathbb{E}(X_i X_j)}_{} - \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{1-p} \underbrace{\mathbb{E}(X_j)}_{1-p}$$

DE MORGAN

SZITA

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \overset{\text{DE MORGAN}}{=} 1 - \mathbb{P}(A_i^c \cup A_j^c) \overset{\text{SZITA}}{=}$$

$$= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(A_i^c)}_{\underbrace{p}_{0.395}} - \underbrace{\mathbb{P}(A_j^c)}_{p} + \underbrace{\mathbb{P}(A_i^c \cap A_j^c)}_{\left(1-\frac{2}{100}\right)^{50}} =: \gamma$$

$$☹ = 100 \cdot \underbrace{\lambda}_{0.239} + 100 \cdot 99 \cdot \underbrace{\left(\gamma - (1-p)^2\right)}_{\underbrace{\left(1-\frac{2}{100}\right)^{50} - \left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}}_{\sim 0.00186}} = \boxed{5.486} = \mathrm{Var}(X)$$

kocka

2020. november 28., szombat 17:52

10. Egy szabályos dobókockával 10-szer dobtam. Jelölje X azt, hogy hány dobásom volt nagyobb, mint az előző dobás. Határozza meg X várható értékét (6 pont).
Bónusz: Határozza meg X szórásnégyzetét (4 pont).

$$X = \sum_{i=1}^{9} X_i, \quad X_i = \mathbb{1}[A_i]$$

$$A_i = \{ Y_{i+1} > Y_i \}, \quad 1 \le i \le 9$$

AHOL Y_i JELÖLI AZ i-EDIK DOBÁS EREDMÉNYÉT

$$\boxed{\mathbb{E}(X)} \overset{\text{LIN.}}{=} \sum_{i=1}^{9} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{9} \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{= \frac{\binom{6}{2}}{6^2} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 6\cdot 6} = \frac{5}{12}} = 9 \cdot \frac{5}{12} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

3.75

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{9} X_i, \sum_{j=1}^{9} X_j \right) =$$

$$\overset{\text{BIL.}}{=} \sum_{i,j=1}^{9} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = ?$$

$$\boxed{i=j}: \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \frac{5}{12} \cdot \left(1 - \frac{5}{12}\right) =: \alpha = 0.243$$

$\boxed{|i-j|=1}$: KOVARIANCIA SZIMMETRIÁJA MIATT FELTEHETJÜK, HOGY $j = i+1$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \underbrace{\mathbb{E}(X_i \cdot X_{i+1})}_{\parallel} - \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{\frac{5}{12}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_{i+1})}_{\frac{5}{12}}$$

$\frac{5}{12}$ $\frac{5}{12}$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \mathbb{P}(Y_i < Y_{i+1} < Y_{i+2}) =$$

$$= \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4/6}{6^3} = \frac{5 \cdot 4}{6^3}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = \frac{5 \cdot 4}{6^3} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 =: \gamma = -0.081$$

$\boxed{|i-j|>1}$: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ FÜGGETLENSÉG MIATT

$$☹ = 9 \cdot \alpha + 2 \cdot 8 \cdot \gamma =$$

$$9 \cdot 0.243 - 16 \cdot 0.081 = \underline{\underline{0.891}} = \mathrm{Var}(X)$$

kunyhó

2020. november 28., szombat 17:52

11. A kunyhómat az Amazonas deltájában a vízpartra építettem. Errefelé minden nap a többitől függetlenül 0.5 valószínűséggel esik az eső. Ha három egymást követő nap esik az eső, akkor a harmadik nap végére elmossa a kunyhómat a megáradt folyó. Ilyenkor reggelre újjáépítem. Jelölje X, hogy 2021-ben hányszor fogom újjáépíteni a kunyhóm. (Tehát például abban a nagyon kis valószínűségű esetben, ha 2020 utolsó két napján és 2021-ben minden nap esik az eső, $X = 365$.) Határozza meg X várható értékét (6 pont).
Bónusz: Határozza meg X szórásnégyzetét (4 pont).

$$X = \sum_{i=1}^{365} X_i, \quad X_i = \mathbb{1}[A_i]$$

$A_i := \{$i-EDIK NAP ÚJJÁÉPÍTEM A KUNYHÓMAT$\}$

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{LIN}}{=} \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i) = 365 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{= \mathbb{P}(\text{2020 UTOLSÓ 3 NAPJÁN ESETT}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{365}{8} \approx 45.6$$

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{365} X_i, \sum_{j=1}^{365} X_j\right) =$$

$$\overset{\text{BIL.}}{=} \sum_{i,j=1}^{365} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = ☺$$

$$|i-j| \leq 2: \quad \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A_i \cap A_j)}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^{3+|i-j|}} - \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{1/8} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_j)}_{1/8}$$

HISZEN AHHOZ, HOGY AZ i-EDIK ÉS A j-EDIK NAPON IS ÚJJÁÉPÍTSEM A KUNYHÓMAT, AHHOZ ÖSSZESEN $3+|i-j|$ KONKRÉT NAPON KELL AZ ESŐNEK ESNIE.

NAPON KELL AZ ESŐNEK ESNIE.

$|i-j| \geq 3$: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, FÜGGETLENSÉG MIATT

$$☺ = 365 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) + 2 \cdot 364 \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}\right) + 2 \cdot 363 \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) + 0 = 85{,}39$$

konzult

2020. november 28., szombat 17:53

12. Egy konzultáción 7 hallgató vesz részt, akik egymástól függetlenül egy-egy kérdéssel előre készülnek az előadással vagy a gyakorlaton megbeszélt 12 feladat valamelyikével kapcsolatban. Az előző évek tapasztalatai alapján egy kérdés az előadás anyagára 0.4 valószínűséggel, a 12 gyakorlati feladat bármelyikére pedig ugyanolyan, 0.05 – 0.05 valószínűséggel irányul. Jelölje X a konzultáció 7 kérdése alatt szóba kerülő gyakorlati feladatok számát. Határozza meg X várható értékét (6 pont).
Bónusz: Határozza meg X szórásnégyzetét (4 pont).

$$X = \sum_{i=1}^{12} X_i, \quad X_i = \mathbb{1}[A_i]$$

$A_i := \{\text{i-EDIK FELADAT SZÓBA KERÜL}\}, \quad 1 \le i \le 12$

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{LIN.}}{=} \sum_{i=1}^{12} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(A_i) =$$

$$= 12 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{= 1-\mathbb{P}(A_i^c) = 1-(1-0.05)^7 =: p} = 12 \cdot (1-(0.95)^7) \approx 3.62$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{12} X_i, \sum_{j=1}^{12} X_j\right) = \overset{\text{BIL.}}{=} \sum_{i,j=1}^{12} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = ☆$$

0.301

$$i = j: \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = p \cdot (1-p)$$

$$i \neq j: \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) - \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(X_j)$$

$$= \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}\underbrace{\mathbb{P}(A_j)} = q - p^2$$

$$= \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{p}\underbrace{\mathbb{P}(A_j)}_{p} = q - p$$

DE MORGAN

SZITA

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 1 - \mathbb{P}(A_i^c \cup A_j^c) =$$

$$= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(A_i^c)}_{(0.95)^7} - \underbrace{\mathbb{P}(A_j^c)}_{(0.95)^7} + \underbrace{\mathbb{P}(A_i^c \cap A_j^c)}_{(0.9)^7} =: q = 0.0816$$

$$\bigstar = 12 \cdot p \cdot (1-p) + 12 \cdot 11 \cdot (q - p^2) = 1.337$$