Valószínűségszámítás
3. RÉSZ
Egydimenziós folytonos valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2020. április 16.

Tartalomjegyzék

1. Folytonos eloszlások **5**
1.1. Ismétlés kalkulusból . . . 5
1.2. Folytonos valószínűségi változók . . . 5
1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény . . . 6
1.4. Intervallum valószínűsége . . . 8
1.5. Medián . . . 8
1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis . . . 8

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel **11**
2.1. Szemléltetés festékkel (tömeggel) . . . 11
2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen . . . 12
2.2. Szemléltetés pontfelhővel . . . 13
2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen . . . 13
2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban . . . 13
2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt . . . 14

3. Random számok transzformációi **17**
3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka . . . 17
3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel . . . 17
3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 18
3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 24
3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 31
3.3.1. Random számok összege . . . 31
3.3.2. Két random szám maximuma . . . 33
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások . . . 33
3.4.1. Arkusz-színusz eloszlás . . . 34
3.4.2. Cauchy eloszlás . . . 37
3.5. Monoton transzformációk . . . 41
3.6. Folytonos szimuláció . . . 42
3.7. Béta eloszlások . . . 43
3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 43

3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése . . . 48
3.7.3. Nem-egyenletes alap-eloszlás esete *(Extra tananyag)* . . . 49

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)* **52**
4.1. Definíciók . . . 52
4.2. Nagy számok törvényei . . . 53
4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára . . . 53
4.2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára . . . 55
4.2.3. NSZT a második momentumra . . . 57
4.2.4. NSZT a varianciára . . . 57
4.2.5. NSZT a szórásra . . . 58
4.2.6. NSZT a mediánra . . . 58
4.3. Példa: Csónak bérbe adása extra haszonnal . . . 58

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai *(– diszkrét és folytonos eset)* **62**

6. Nevezetes folytonos eloszlások **63**
6.1. Exponenciális eloszlás . . . 63
6.1.1. Örökifjú tulajdonság . . . 64
6.1.2. Exponenciális eloszlások alkalmazásai . . . 66
6.1.3. Öregedő tulajdonság . . . 67
6.1.4. Fiatalodó tulajdonság . . . 68
6.2. Gamma eloszlás . . . 69
6.2.1. Mennyi idő múlva történik az n -ik baleset? . . . 72
6.2.2. Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van? . . . 74
6.3. Normális eloszlások . . . 74
6.3.1. Standard normális eloszlás . . . 74
6.3.2. Normális eloszlás μ , σ paraméterekkel . . . 78
6.3.3. Centrális határeloszlás tétel . . . 82
6.3.4. Normális eloszlások alkalmazásai . . . 83
6.4. Béta eloszlások várható értéke, szórása *(Extra tananyag)* . . . 86

7. Közelítések normális eloszlással **89**
7.1. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással . . . 89
7.1.1. Előkészítés egy példával . . . 89
7.1.2. A de Moivre – Laplace tétel . . . 92
7.1.3. A de Moivre – Laplace tétel, mint a centrális határeloszlás tétel speciális esete . . . 93
7.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 94
7.2.1. A relatív gyakoriság közelítő eloszlása . . . 94
7.2.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 94
7.2.3. Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy . . . ? . . . 95
7.3. Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással . . . 97
7.4. Várható érték közelítése átlaggal . . . 97
7.4.1. Az átlag közelítő eloszlása . . . 97
7.4.2. Várható érték közelítése átlaggal . . . 98
7.4.3. Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy . . . ? . . . 98

8. Eloszlások transzformációi **101**
8.1. Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel . . . 101
8.1.1. Szemléltetés vezérvonalakkal . . . 101
8.1.2. Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi . . . 104
8.1.3. Egyenletes eloszlás monoton transzformációi . . . 106
8.1.4. Exponenciális eloszlás transzformációi . . . 108
8.2. Lineáris transzformációk leírása képletekkel . . . 109
8.2.1. Növekedő eset ($a > 0$) . . . 110

8.2.2. Csökkenő eset ($a < 0$) . . . 111
8.2.3. A két képlet egységesítése . . . 113
8.3. Monoton transzformációk leírása képletekkel . . . 113
8.3.1. Növekedő transzformációk . . . 113
8.3.2. Csökkenő transzformációk . . . 114
8.3.3. A két képlet egységesítése . . . 115
8.4. Lognormális eloszlások . . . 115

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)* **119**

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)* **120**
10.1. Trükkös eltolás . . . 120
10.2. Barátok és osztályok . . . 120
10.3. Főnökök . . . 120
10.4. Ellentmondásra jutunk . . . 121

11. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)* **122**
11.1. A probléma megfogalmazása . . . 122
11.2. A valószínűség meghatározása . . . 123
11.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása . . . 124
11.3. Az általános eset megfogalmazása . . . 125
11.4. Miért hívjuk az erős törvényt *erős*nek? . . . 125

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. február 5.

Vetier András

1. Folytonos eloszlások

1.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x -re
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük **az** $f(x)$ **terület-függvénye**-ként adódó **primitív függvény**ét:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

aminek deriváltjaként – minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos – az $f(x)$ -et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x)$$

A derivált – mint tudjuk – különbségek határértéke: $a < x < b$ fennállása mellett $a \to x,\ b \to x$ esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \to f(x)$$

Ezt a tény hétköznapi nyelven úgy lehet mondani, hogy $a < x < b$ fennállása mellett x -hez közeli a és b esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \approx f(x)$$

vagy átárendezéssel:

$$F(b) - F(a) \approx f(x)\,(b - a)$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbségként kaphatjuk meg:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Ez a jól ismert Newton-Leibniz formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton-Leibniz formulában a és b nem kell hogy közel legyenek egymáshoz.

1.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek, de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumot tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetőek diszkréteknek. Példák:

- $X =$ a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor

- X = amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- X = egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- X = egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- X = a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonos**nak mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy – a fentiekkel ellentétben – egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$ -szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathrm{P}(\, X \le x \,)$$

Az eloszlásfüggvények egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0 -val egyenlő, ezért a definícióban "kisebb vagy egyenlő" helyett "kisebb" is írható:

$$F(x) = \mathrm{P}(\, X < x \,)$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathrm{P}(\, X \le x \,)$ valószínűség nagyobb a $\mathrm{P}(\, X < x \,)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi a x valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\, X \le x \,) - \mathrm{P}(\, X < x \,) = \mathrm{P}(\, X = x \,)$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy **diszkrét** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz
3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. az eloszlásfüggvény grafikonja vízszintes vonalakból és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **diszkrét** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy **folytonos** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz

3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. mindenhol folytonos

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **folytonos** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Vegyük észre, hogy a diszkrét és a folytonos esetek az 1-3. pontokban megegyeznek, és csak a 4. pontban térnek el.

A **jobboldali eloszlásfüggvény** is definiálható a

$$T(x) \ = \ \mathrm{P}(\ X \ \geq \ x\ )$$

képlettel. A jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait itt nem soroljuk fel. A tulajdonságok kigondolása az Olvasó dolga lesz a gyakorló feladatok között.

A könyvnek ebben a részében a folytonos esetre fókuszálunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel:

$$F'(x) \ = \ f(x)$$

Az $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**.

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \ = \ 1$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekszik.

Tekintsünk most az x pont körül egy pici intervallumot, ami lehet például az $[x; x+\Delta x]$ intervallum, ahol Δx egy pici pozitív szám. Az előbbieket az $a \ = \ x$, $b \ = \ x+\Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(\ x \ \leq \ X \ \leq \ x+\Delta x\ ) \ = \ \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

A jobboldalon álló integrált $f(x)\Delta x$ -szel közelíthetjük, ezért

$$\mathrm{P}(\ x \ \leq \ X \ \leq \ x+\Delta x\ ) \ \approx \ f(x)\Delta x$$

vagyis

$$f(x) \ \approx \ \frac{\mathrm{P}(\ x \ \leq \ X \ \leq \ x+\Delta x\ )}{\Delta x}$$

Előfordlhat, hogy az $[x; x+\Delta x]$ intervallum helyett kényelmesebb az x pont körüli $[x_1, x_2]$ intervallummal dolgozni. Ilyenkor

$$f(x) \ \approx \ \frac{\mathrm{P}(\ x_1 \ \leq \ X \ \leq \ x_2\ )}{x_2 - x_1}$$

ahol $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül.

1. Megjegyzés: Jól jegyezzük meg: ***a sűrűségfüggvény értéke egy x helyen*** azt mutatja, hogy az x körüli pici intervallumot véve, ***a pici intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa a pici intervallum hosszának.***

2. Megjegyzés: Hangsúlyozzuk, hogy a sűrűségfüggvény $f(x)$ -szel jelölt értéke ***semminek sem a valószínűsége***. Ennek a ténynek az elfogadását és megjegyzését segítheti, ha észbentartjuk: *a sűrűségfüggvény értéke lehet 1 -nél nagyobb is, ámde semilyen valószínűség értéke sem lehet 1 -nél nagyobb*. Mint néhány sorral feljebb már említettük, a sűrűségfüggvény értéke egy arány közelítő értékét jelenti.

1.4. Intervallum valószínűsége

Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$\mathrm{P}(\ a\ \leq\ X\ \leq\ b\ )$$

valószínűsége az $F(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásával adható meg:

$$\mathrm{P}(\ a\ \leq\ X\ \leq\ b\ )\ =\ F(b) - F(a)$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig – a Newton-Leibniz szabály szerint – az $f(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett határozott integráljával egyenlő:

$$\mathrm{P}(\ a\ \leq\ X\ \leq\ b\ )\ =\ F(b) - F(a)\ =\ \int_a^b f(x)\,dx$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a, b]$ intervallum helyett a nyílt (a, b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$\mathrm{P}(\ a\ <\ X\ <\ b\ )\ =\ F(b) - F(a)\ =\ \int_a^b f(x)\,dx$$

1.5. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x)\ =\ \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész és és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}(\ (\ -\infty\ ;\ x\ )\ )\ =\ \mathrm{P}(\ (\ x\ ;\ +\infty\ )\ )\ =\ \frac{1}{2}$$

Ilyenkor az x számot **medián**nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimmetrikus valamilyen pontra, a szimmetriapont a mediánja.

Megjegyzés. Bár gyakorlati jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy a $(\ -\infty\ ;\ x_1\ )$ és az $(\ x_2\ ;\ +\infty\ )$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallum minden pontja medián.

1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás és 0 és 1 közötti akármilyen p esetén az

$$F(x)\ =\ p$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész valószínűsége p , és a tőle jobbra lévő rész valószínűsége $(1-p)$:

$$\mathrm{P}(\,(-\infty\,;\,x\,)\,)\;=\;p \qquad\qquad \mathrm{P}(\,(\,x\,;\,+\infty\,)\,)\;=\;1-p$$

Ilyenkor az x számot **a** p **értékhez tartozó kvantilis**nek, vagy rövidebben mondva p **-kvantilis**nek nevezzük. Azt a függvényt, ami a 0 és 1 közötti p számokhoz hozzárendeli a p-kvantilis értékét, **kvantilis függvény**nek nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy *a p -kvantilis értéke megegyezik az eloszlásfüggvény inverzének a p helyen vett értékével:*

$$p\text{ -kvantilis} \;=\; F^{-1}(p)$$

Tehát *a kvantilis függvény megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével.*

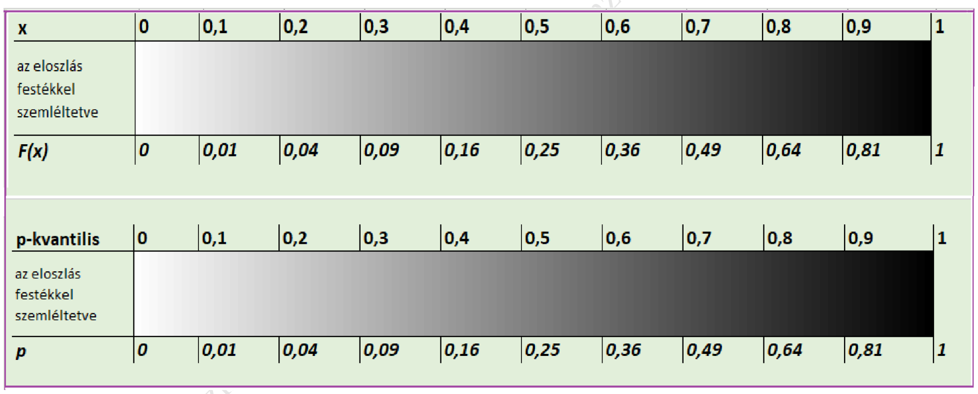
Az alábbi ábrán az

$$f(x) \;=\; 2x \quad (0 \;<\; x \;<\; 1\,) \quad \text{sűrűségfüggvényű}$$

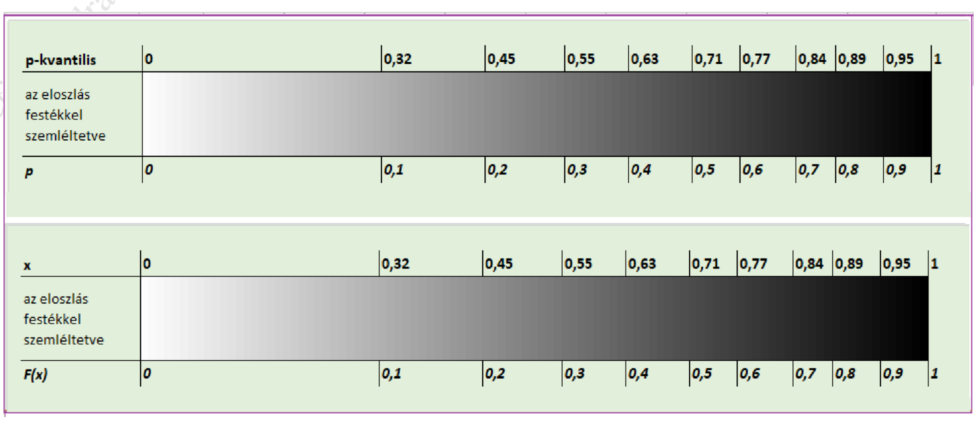
,

$$F(x) \;=\; x^2 \quad (0 \;<\; x \;<\; 1\,) \quad \text{eloszlásfüggvényű}$$

eloszlással kapcsolatban szemléltetjük az eloszlásfüggényt, illetve annak inverzét, a kvantilis függvényt:



1. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei*



2. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei (más számokkal)*

A szóbanforgó eloszlásra a kvantilis függvény képletét így adhatjuk meg: $F^{-1}(p) = \sqrt{p} \quad (0 < p < 1)$.

Vegyük észre, hogy tetszőleges eloszlásra $p = 0.5$ *esetén a* p*-kvantilis éppen a medián*. A 0.25 -kvantilis neve: **alsó kvartilis**, a 0.75 -kvantilis neve: **felső kvartilis**. (Figyelem: a kvantilis és kvartilis szavak csak egyetlen betűben különböznek. Ne keverjük őket össze!) Az ábrán szemléltetett eloszlásra

- az alsó kvartilis $\sqrt{0.25} = 0.5$,
- a medián $\sqrt{0.5} \approx 0.71$,
- a felső kvartilis $\sqrt{0.75} \approx 0.87$.

Azok, akik törtek helyett százalékokban szeretnek gondolkodni, a p -kvantilis helyett a megfelelő százalék értéket és **percentilis**t mondhatnak. Például:

- 0.1 -kvantilis helyett 10 százalékos percentilist,
- 0.9 -kvantilis helyett 90 százalékos percentilist,
- 0.99 -kvantilis helyett 99 százalékos percentilist

lehet mondani.

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel

2.1. Szemléltetés festékkel (tömeggel)

A folytonos valószínűségi változókat modellező *folytonos eloszlások* fogalmának megértése nem könnyű. Sok embernek nehézséget okoz. Remélhetőleg segít, hogy az alábbiakban a *folytonos eloszlás*okat **tömegeloszlások, festékeloszlások** segítégével szemléltetjük.

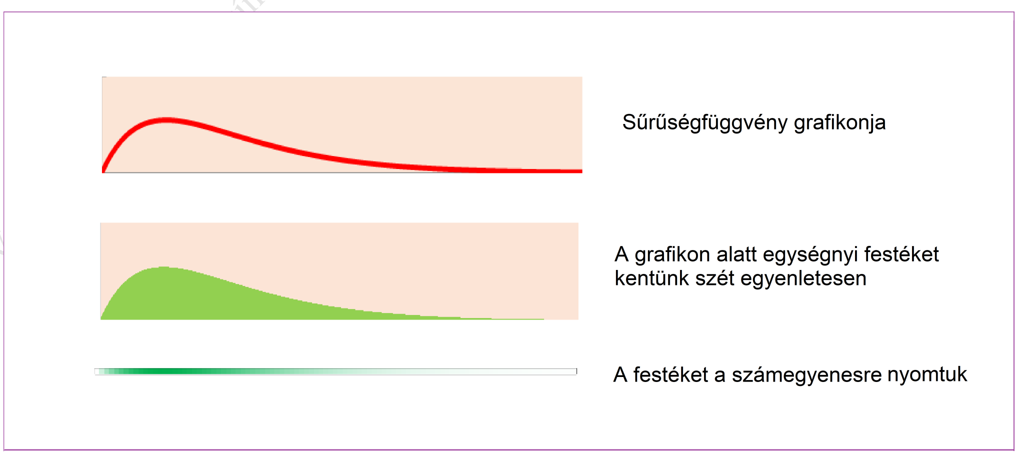
A tömegsűrűség fogalma fizikából ismert. Igaz, leginkább a (3-dimenziós) térben vett sűrűség fogalmát szoktuk meg, de a felületi és a vonal menti sűrűségről is hallhattunk, talán tanultunk is. Ha nem, akkor "jobb most, mint soha".

Ha egy valószínűségszámítási probléma kapcsán egy (1-dimenziős) folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényével van dolgunk, könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a számegyenesen, aminek a vonal (itt a vonal a számegyenes) menti sűrűségét a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le: minden x -re teljesül, hogy az x helyen a tömegsűrűség $f(x)$. Ilyen tömegeloszlást az alábbiak szerint elő is állíthaunk egy "úthenger" segítségével.

Rajzoljuk le az $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonját az (x, y) síkon. A grafikon alatti terület 1 -gyel egyenlő. Kérjünk meg egy szépen dolgozó festő mestert, hogy a grafikon alatti tartományon egyenletesen kenjen el egységnyi össztömegű festéket. A jó festő ezt tökéletesen megcsinálja. Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a tartomány minden részhalmazára annyi festék kerül, mint amekkora a részhalmaz területe. És akkor most jöjjön az úthenger, és a tartományra kent festéket az y tengellyel párhuzamos préseléssel nyomja az x tengelyre! Jobb lenne talán úgy mondani, hogy nyomja az x tengely***be***! A préselés eredményeként a számegyenesen (az x -tengelyen) egy tömegeloszlást kapunk, ami festékből készült, és így a szín árnyalat jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább a festék. Nyilvánvaló (tessék meggondolni!), hogy a számegyenes minden x pontjában a vonalmenti tömegsűrűség éppen $f(x)$.

Természetesen mindezt csak gondolatban lehet megcsinálni, hiszen a valóságban nem lehet a 0 vastagságú egyenesre (egyenes***be***) tömeget préselni. De a fantáziánk – remélhetőleg – elbírja a leírtakat.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme: amikor a könyv következő részében a többdimenziós eloszlásokról fogunk tanulni, akkor egzakt módon is beláthatjuk, hogy egy $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonja alatti síktartományon vett egyenletes eloszlás vetülete az x -tengelyen olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x)$.



3. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés festékkel*

Vegyük észre, hogy

- egy intervallum valószínűsége megfelel az intervallumon lévő tömeg mennyiségének,
- a medián megfelel annak a pontnak, amire igaz az, hogy tőle jobbra is és balra is $\frac{1}{2}$ mennyiségű tömeg van.

A várható érték, a második momentum, a variancia fogalmát egyelőre még csak diszkrét eloszlásokra vettük, folytonosakra majd csak később tanuljuk, de előrebocsátjuk, hogy a folytonos esetre is igaz, hogy

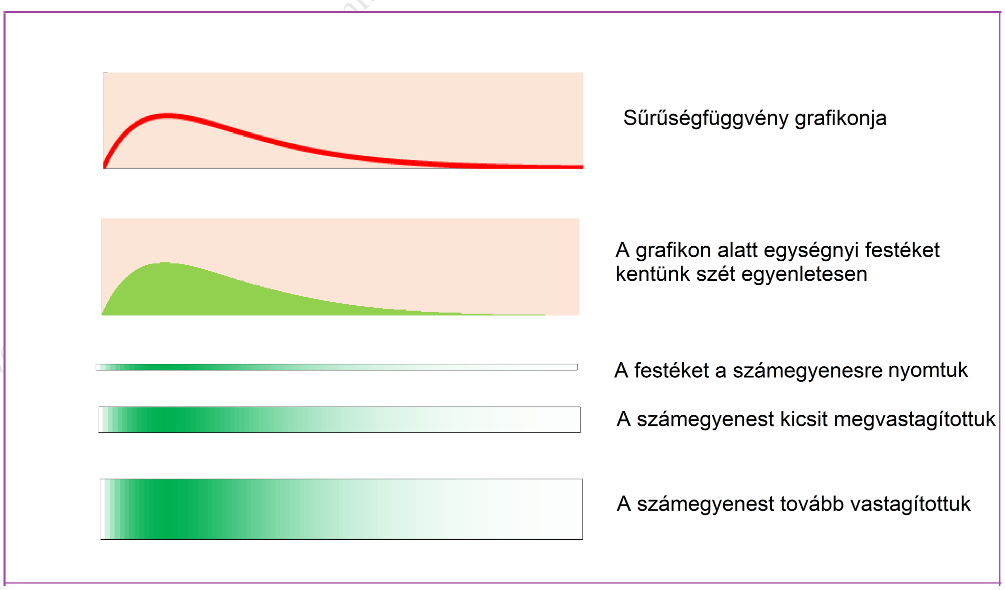
- a várható érték megfelel a tömegeloszlás súlypontjának,
- egy c pontra vonatkozó második momentum megfelel a tömegeloszlás c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának,
- a variancia pedig megfelel a tömegeloszlásnak a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának.

2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen

A könnyebb szemléltethetőség kedvéért a 0 vastagságú számegyenest érdemes kicsit "megvastagítani", azaz az egyenes helyett egy keskeny sávot venni, és sávon elképzelni a festéket úgy, hogy

- a sávon belül minden függőleges szakasz mentén a (síkbeli) sűrűség állandó legyen, tehát
- a (síkbeli) sűrűség csak x -től függjön úgy, hogy
- x -irányban az adott $f(x)$ függvény szerint változzon, vagyis
- minden (x, y) pontban a festék (síkbeli) sűrűsége $f(x)$ -szel legyen egyenlő.

Ennél a szemléltetésnél a megvastagított számegyenes vastagságának, a sáv szélességének nincs jelentősége. Ha a sáv keskeny, akkor jobban hasonlít, jobban emlékeztet a 0 vastagságú igazi számegyenesre. De ha a sávot nagyon keskenyre vesszük, akkor a szétkent festék sáűrűsége, színárnyalata nem látszik túl jól. Izlés dolga, hogy milyen széles sávot veszünk a 0 vastagságú igazi számegyenes helyett. E könyv szerzője szerint valahol fél és egy centiméter között van a legjobb szélesség.



4. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés a megvastagított sávon festékkel*

2.2. Szemléltetés pontfelhővel

2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen

Örvendetes és fontos tény, hogy egy folytonos valószínűségi változó eloszlását szemléltető tömeg- vagy festékeloszlást a valószínűségi változóra végzett kísérleti eredményekből lehet közelíteni. Eléggé kézenfekvő ötlet a következő: sok kísérletet végzünk a valószínűségi változóra, és a számegyenesen a kísérleti eredményeknek megfelelő pontokba apró korongokat rajzolunk, illetve rajzoltatunk a számítógéppel. Természetesen a korongocskák ott lesznek sűrűbben, ahol a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értéke nagyobb, és ott lesznek ritkábban, ahol a sűrűségfüggvény értéke kisebb.

Azonban ezzel az egyszerű módszerrel gondok lépnek fel:

1. Ha kevés kísérletet végzünk, és így kevés korongocskát rakunk ki, akkor nem igazán lehet megmondani, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.

2. Ha sok korongot teszünk a számegyenesre, akkor a korongok átfedik egymást, egybe olvadnak és a korongocskákból egy semmitmondó megvastagodott számegyenest kapunk. A számegyenes szinte mindenhol olyan vastag lesz, mint a korongocskák átmérője, és megint nem lehet látni, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.

2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban

A korongok átfedésének gondja drasztikusan lecsökken, szinte meg is szűnik, ha a korongokat nem a számegyenesre rakjuk, hanem egy keskeny sávba, melyet a számegyenes fölött veszünk fel. Ha a számegyenes a papíron, vagy a képernyőn vízszintes, akkor a kísérleti eredmények adják a korongok közepének a vízszintes koordinátáit, a függőleges koordinátákat pedig az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- ha mondjuk 1000 kísérleti eredményünk van, akkor
  az első korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1}{1000}$ -ed része,
  a második korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{2}{1000}$ -ed része,
  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{3}{1000}$ -ed része,
  és így tovább,
  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1000}{1000}$ -ed része,

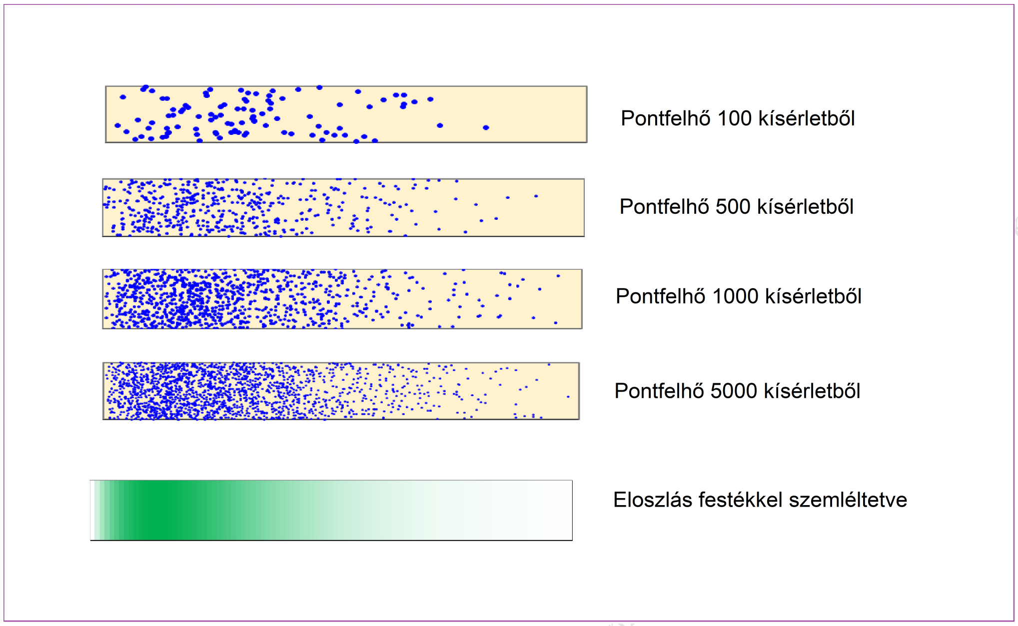
  vagy

- minden korong függőleges koordinátáját úgy állítjuk elő, hogy a sáv szélességét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmal.

A két lehetőség mindegyike ugyanazt a szép és látványos eredményt adja:

- a sávban keletkező pontfelhő sűrűsége ránézésre jól érzékelhető, jól értelmezhető,
- függőleges irányban a sűrűség mindenhol állandó, ezért nem is kell a függőleges iránnyal törődni,
- a valójában kétdimenziós ábrát úgy értelmezhetjük, mintha egydimenziós ábra lenne, mintha a 0 vastagságú számegyenes csak éppen megvastagodott volna,
- vízszintes irányban a pontfelhő sűrűsége tökéletesen követi a valószínűségi változó elméleti sűrűségfüggvényét.

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a pontfelhő annak a folytonos festékeloszlásnak a benyomását adja, melyet a "Festék a megvastagított számegyenesen" című alpontban készítettünk:



5. ábra. *Pontfelhő és festék a megvastagított számegyenesen*

2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt

Továbbra is az $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{1000}$ kísérleti eredmények adják a korongok közepeinek a vízszintes koordinátáit, de a függőleges koordinátákatt az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- az első korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_1) \cdot \frac{1}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_1 helyen szorozva $\frac{1}{1000}$ -del,

  a második korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_2) \cdot \frac{2}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_2 helyen szorozva $\frac{2}{1000}$;-del,

  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_3) \cdot \frac{3}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_3 helyen szorozva $\frac{3}{1000}$ -del,

  és így tovább,

  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_{1000} helyen szorozva $\frac{1000}{1000}$ -del,

  tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

$$\left(X_1 \,,\, f(X_1) \cdot \frac{1}{1000} \right)$$

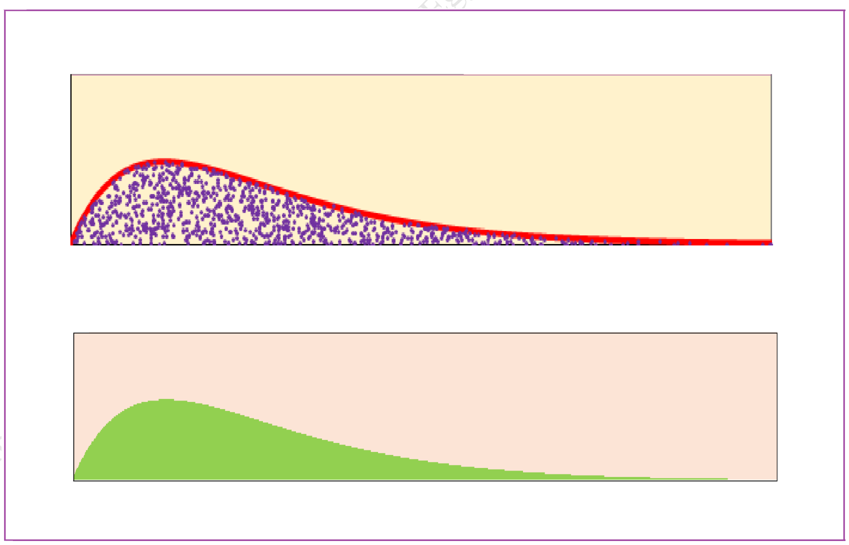
$$\left(X_2 \, , \, f(X_2) \cdot \frac{2}{1000} \right)$$
$$\left(X_3 \, , \, f(X_3) \cdot \frac{3}{1000} \right)$$
$$\vdots$$
$$\left(X_{1000} \, , \, f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000} \right)$$

vagy

- mindent ugyanúgy csinálunk, mint az előbb, de a függőleges koordinátákat úgy állítjuk elő, hogy a sűrűségfüggény értékét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmal, tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

$$(\, X_1 \, , \, f(X_1) \cdot \mathrm{RND}_1 \,)$$
$$(\, X_2 \, , \, f(X_2) \cdot \mathrm{RND}_2 \,)$$
$$(\, X_3 \, , \, f(X_3) \cdot \mathrm{RND}_3 \,)$$
$$\vdots$$
$$(\, X_{1000} \, , \, f(X_{1000}) \cdot \mathrm{RND}_{1000} \,)$$

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a sűrűségfüggvény grafikonja alatt olyan pontfelhőt kapunk, melynek síkbeli sűrűsége egyenletes, mintha valaki a sűrűségfüggvény alatti síkrészt véletlenszerűen, de egyenletesen pöttyözné be.



6. ábra. *Pontfelhő és egyenletesen szétkent festék a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*

A módszer egzakt háttere: Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az

$$(\, X \, , \, f(X) \cdot \mathrm{RND} \,)$$

kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlást követ az $f(x)$ grafikonja alatti síktartományon.

A következő fejezetben a legfontosabb folytonos eloszlásokkal kapcsolatban

- megadjuk a sűrűségfüggvény grafikonját,
- szemléltetjük az eloszlást festékkel,
- ábrázolunk egy pontfelhőt a megvastagított számegyenesen
- és egy pontfelhőt a sűrűségfüggvény grafikonja alatt is,
- és végül lerajzoljuk az eloszlásfüggvény grafikonját.

3. Random számok transzformációi

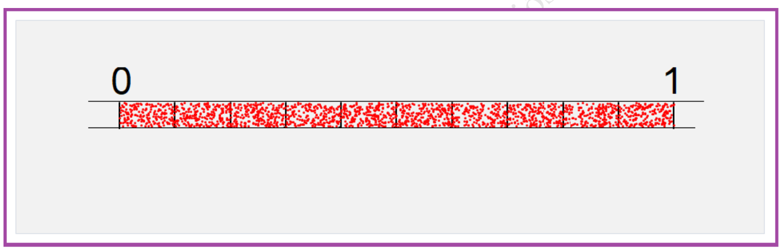
Számítógép által generált random számokkal bárki kísérletezhet, játszadozhat. A játékon túlmenően a random mind tudományos, mind gyakorlati szempontból is fontosak, hasznosak. Ezért először ilyen példákat veszünk.

3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka

Először csak ábrákkal mutatjuk be, hogy mi történik, ha random számokat négyzetre emelünk, vagy gyököt vonunk belőlük, vagy reciprokaikat vesszük. Ezek után következnek majd az egyszerű elméleti számolások. Tessék az ábrákat nézegetni, random számokkal számítógépen kísérletezni, utána pedig az elméleti számolásokat megérteni!

3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel

Ha számítógéppel generálunk 1000 random számot, és azokat a megvastagított számegyenesen ábrázoljuk, akkor egyenletes eloszlású pontfelhőt kapunk:

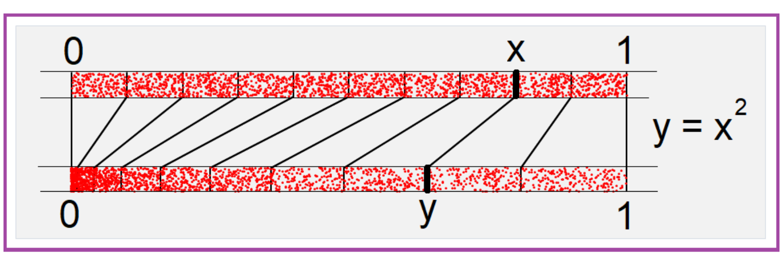


7. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő a* $[\,0\,,\,1\,]$ *intervallumon*

1. Példa: Random szám négyzete

$$Y = \mathrm{RND}^2$$

Ha az 1000 random szám mindegyikét négyzetre emeljük, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a négyzetre emelést megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:

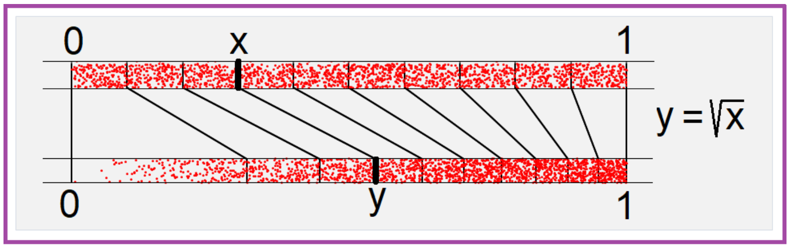


8. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$Y = \sqrt{\text{RND}}$$

Ha az 1000 random szám mindegyikéből gyököt vonunk, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a gyökvonást megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:

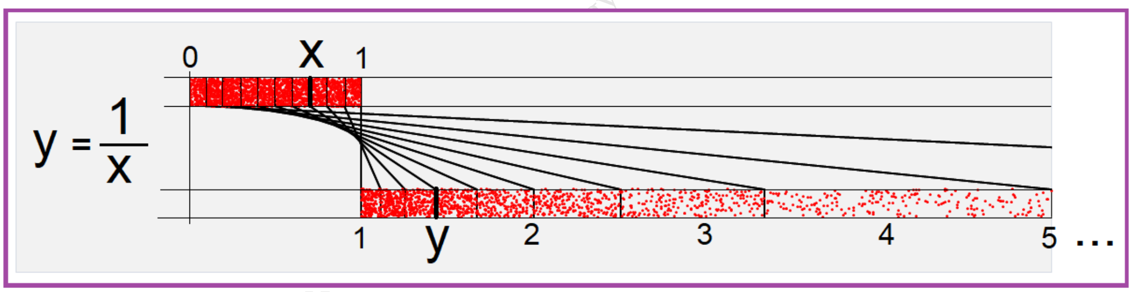


9. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

3. Példa: Random szám reciproka

$$Y = \frac{1}{\text{RND}}$$

Ha az 1000 random szám mindegyikének a reciprokát vesszük, vagyis az egyenletes eloszlású pontfelhőt a reciprok képzést megtestesítő vezérvonalak mentén transzformáljuk, akkor a pontfelhő így deformálódik:



10. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja a reciprok függvénnyel*

3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Mivel a most következő számításokban többször is felhasználjuk, itt kihangsúlyozzuk a tényt:

$$0 < z < 1 \quad \text{esetén} \quad \text{P}(\text{RND} \le z) = z$$

1. Példa: Random szám négyzete

$$Y = \text{RND}^2$$

Eloszlásfüggvény:

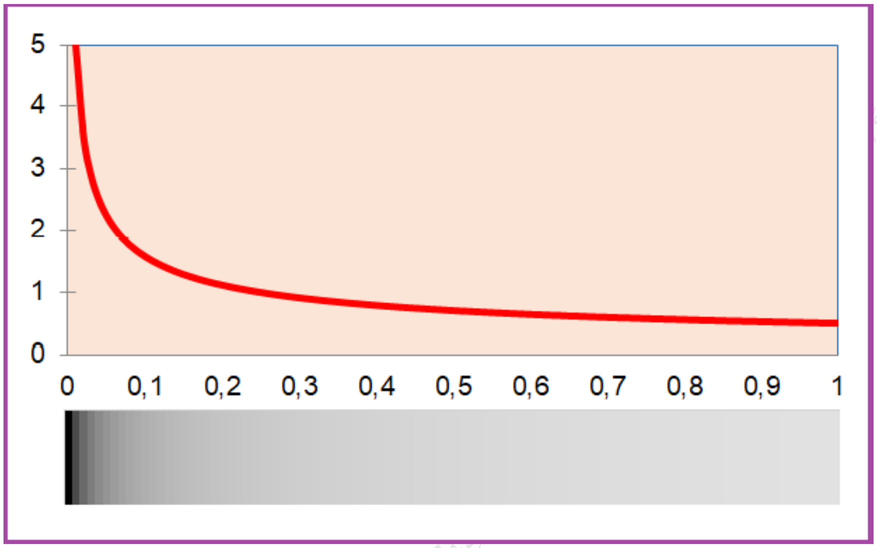
$$G(y) = \sqrt{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

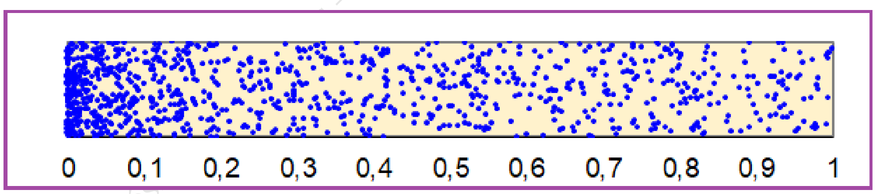
$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{ha} \quad 0 < y < 1$$

Tehát egy $[\, a \,;\, b \,]$ intervallum valószínűsége:

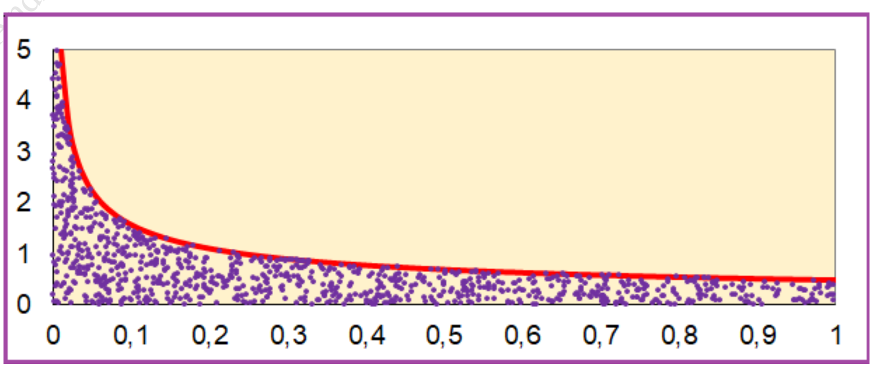
$$\mathrm{P}(\, a \le Y \le b \,) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{y}} \, dy \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$



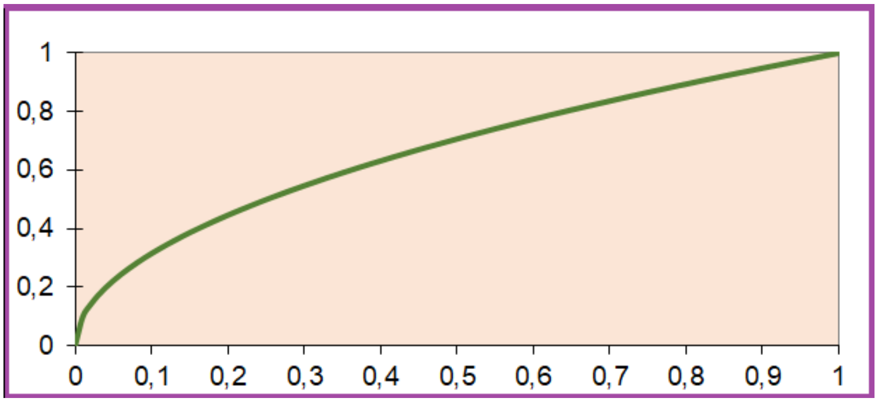
11. ábra. *Random szám négyzete: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



12. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



13. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



14. ábra. *Random szám négyzete: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = \mathrm{RND}^2$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < y < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \mathrm{P}(\, Y \leq y \,) = \mathrm{P}\left(\, \mathrm{RND}^2 \leq y \,\right) = \mathrm{P}(\, \mathrm{RND} \leq \sqrt{y} \,) = \sqrt{y} \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = (\, \sqrt{y}\,)' = \left(y^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}\left(y^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$Y = \sqrt{\mathrm{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

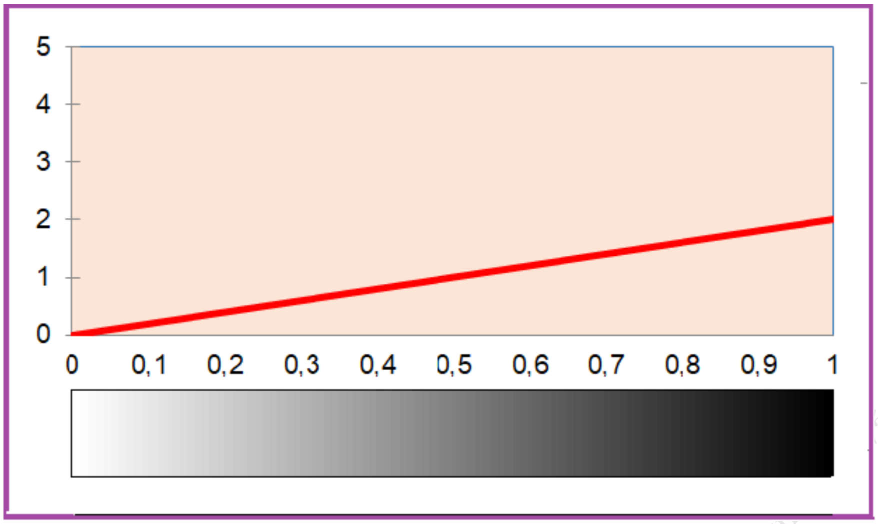
$$G(y) = y^2 \qquad \text{ha} \quad 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

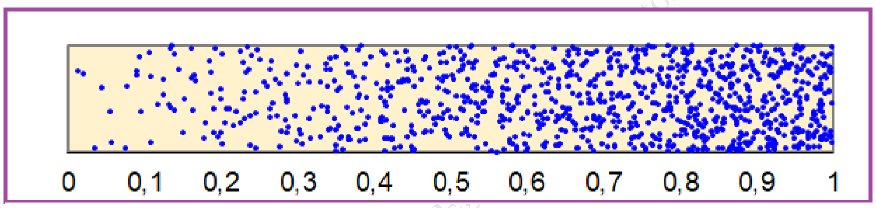
$$g(y) = 2y \qquad \text{ha} \quad 0 < y < 1$$

Tehát egy $[\, a \,;\, b \,]$ intervallum valószínűsége:

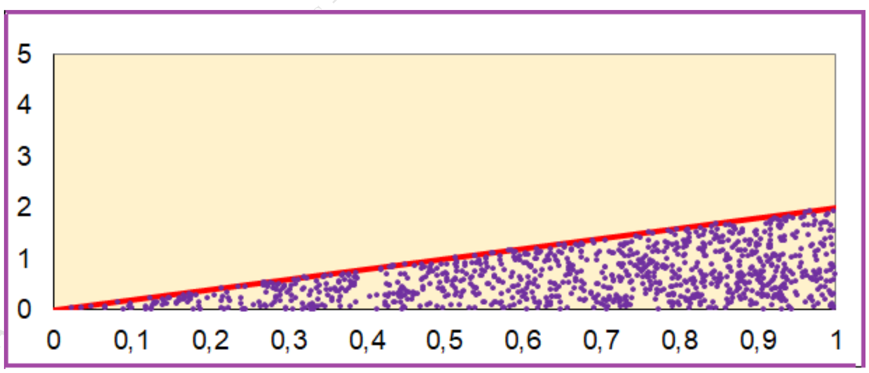
$$\mathrm{P}(\, a \leq Y \leq b \,) = b^2 - a^2 = \int_a^b 2y \; dy \qquad \text{ha} \quad 0 \leq a < b \leq 1$$



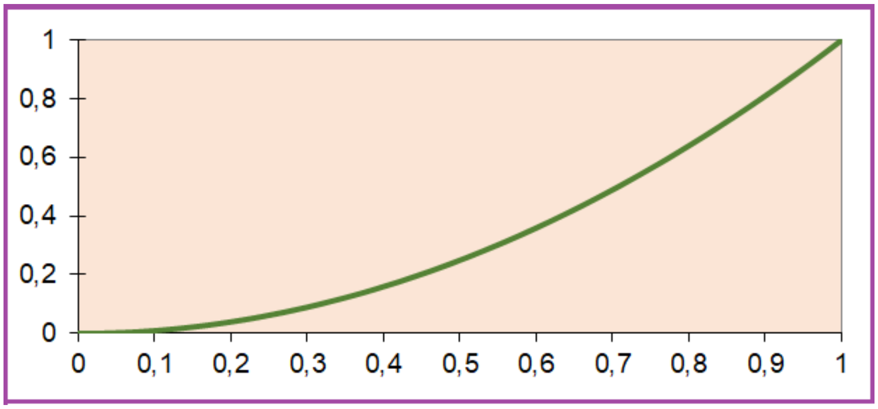
15. ábra. *Random szám négyzetgyöke: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



16. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



17. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



18. ábra. *Random szám négyzetgyöke: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = \sqrt{\text{RND}}$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < y < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \text{P}(\, Y \le y \,) = \text{P}\left(\sqrt{\text{RND}} \le y \right) = \text{P}\left(\, \text{RND} \le y^2 \,\right) = y^2 \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = \left(\, y^2 \,\right)' = 2y \qquad \text{ha } 0 < y < 1$$

3. Példa: Random szám reciproka

$$Y = \frac{1}{\text{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

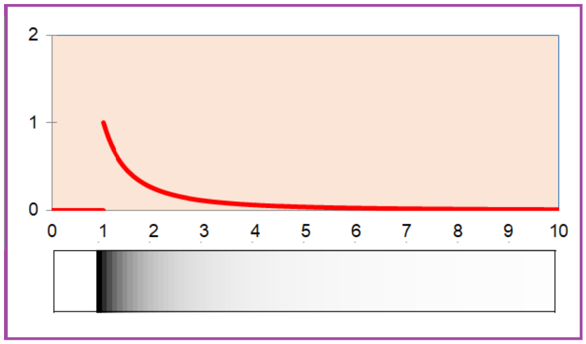
$$G(y) = 1 - \frac{1}{y} \qquad \text{ha} \quad 1 < y < \infty$$

Sűrűségfüggvény:

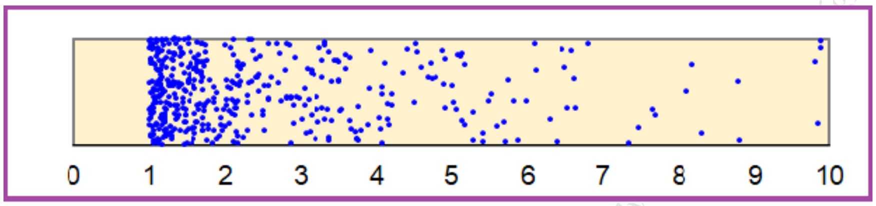
$$g(y) = \frac{1}{y^2} \qquad \text{ha} \quad 1 < y < \infty$$

Tehát egy $[\, a \,;\, b \,]$ intervallum valószínűsége:

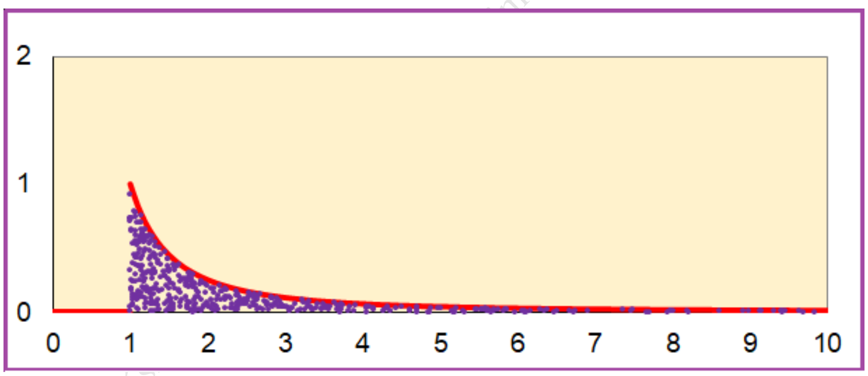
$$\text{P}(\, a \le Y \le b \,) = \left(1 - \frac{1}{b} \right) - \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \int_a^b \frac{1}{y^2}\, dy \qquad \text{ha} \quad 1 \le a < b < \infty$$



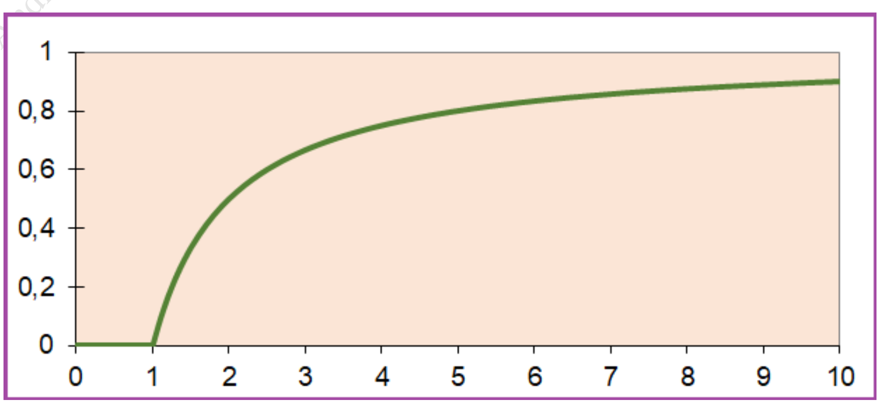
19. ábra. *Random szám reciproka: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



20. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



21. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



22. ábra. *Random szám reciproka: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $Y = 1/\text{RND}$ lehetséges értékei az $(1, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $1 < y < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \text{P}(Y \le y) = \text{P}\left(\frac{1}{\text{RND}} \le y\right) = \text{P}\left(\frac{1}{y} \le \text{RND}\right) = \text{P}\left(\text{RND} \ge \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{x} \qquad (y > 1)$$

Sűrűségfüggvény:

$$g(y) = F'(y) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)' = \left(1 - y^{-1}\right)' = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \qquad (y > 1)$$

3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

Ebben az alfejezetben olyan valószínűségi változókat fogunk vizsgálni melyeket két random számból származtatunk valamilyen művelettel. A vizsgált valószínűségi változót nem X -szel, hanem Z -vel fogjuk jelölni. Z eloszlásfüggvényének jele $R(z)$, sűrűségfüggvényének jele pedig $r(z)$ lesz. Mivel az $(\text{RND}_1, \text{RND}_2)$ véletlen pont az egységnégyzeten egyenletes eloszlást követ, egy vele kapcsolatos esemény valószínűsége területek hányadosaként számítható: a kedvező kimenelek halmazának a területét kell osztani a négyzet területével. A négyzet területe egyenlő 1 -gyel, ezért az osztástól el lehet tekinteni.

1. Példa: Random számok összege:

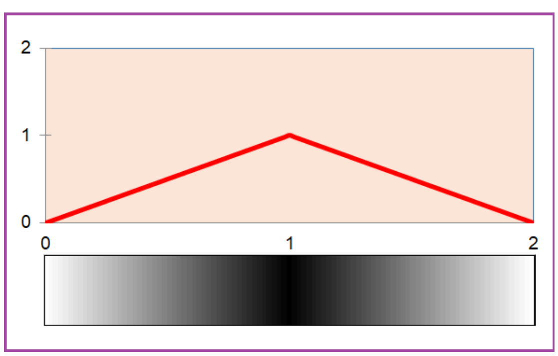
$$Z = \text{RND}_1 + \text{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

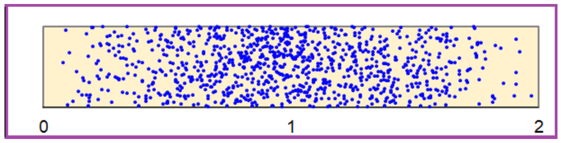
$$R(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{ha } 1 < z < 2 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

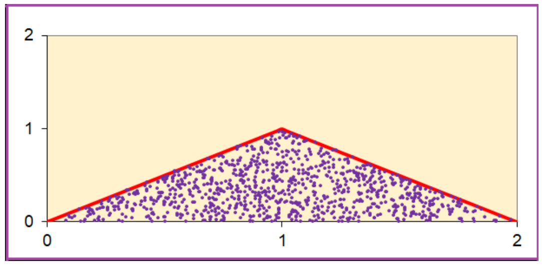
$$r(z) = \begin{cases} z & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 2 - z & \text{ha } 1 < z < 2 \end{cases}$$



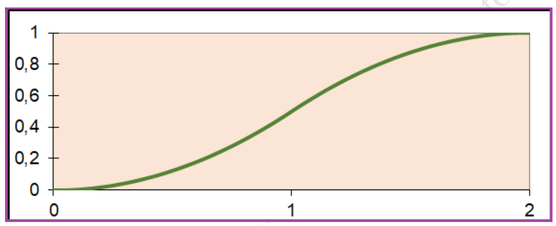
23. ábra. *Random számok összege: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



24. ábra. *Random számok összege: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



25. ábra. *Random számok összege: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



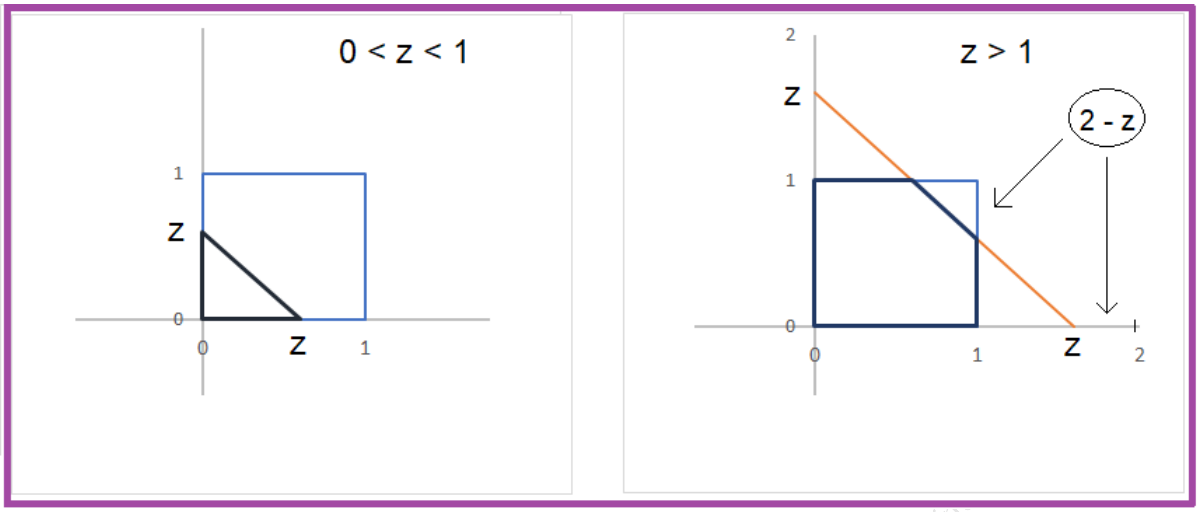
26. ábra. *Random számok összege: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: A $Z = \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $[\,0\,,\,2\,]$ intervallumot teszik ki, ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < 2$.

Eloszlásfüggvény:

$$R(z) = \mathrm{P}(\,Z \le z\,) = \mathrm{P}(\,\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 \le z\,)$$

Az $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 \le z$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $x + y = z$ egyenletű egyenes alatti rész jelenti, ami



27. ábra. $RND_1 + RND_2$ *eloszlásfüfggvényének levezetése*

- $0 \le z \le 1$ esetén egy derékszögű háromszög, melynek befogói z hosszúságúak, így területe területe $\frac{z^2}{2}$,
- $1 \le z \le 2$ esetén pedig egy ötszög, melynek komplementere egy derékszögű háromszög $2 - z$ hosszúságú befogókkal, $\frac{(2-z)^2}{2}$ területtel, így az ötszög területe $1 - \frac{(2-z)^2}{2}$.

Ezért

$$R(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = R'(z) = \begin{cases} (\frac{z^2}{2})' = z & \text{ha } 0 < z < 1 \\ (1 - \frac{(2-z)^2}{2})' = 2 - z & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

2. Példa: Random számok szorzata:

$$Z = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

$$R(z) = z - z \ln z \qquad \text{ha } 0 < z < 1$$

Sűrűségfüggvény:

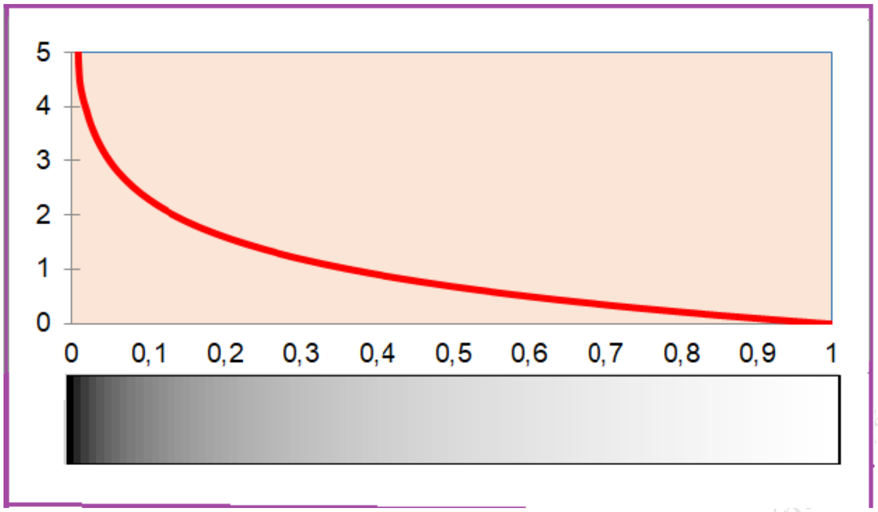
$$r(z) = -\ln z \qquad \text{ha } 0 < z < 1$$

Tehát $0 \le a < b \le 1$ esetén az $[\, a\,;\, b\,]$ intervallum valószínűsége:

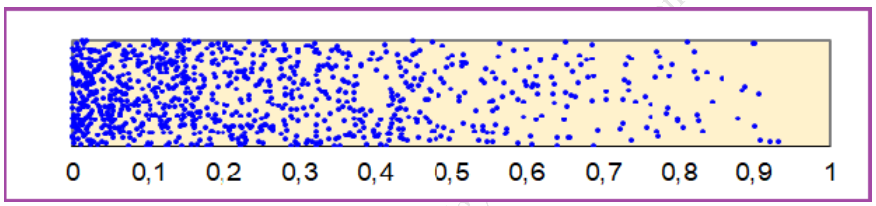
$$\mathrm{P}(\, a \le Z \le b\,) = (\, b - b \ln b\,) - (\, a - a \ln a\,)$$

avagy

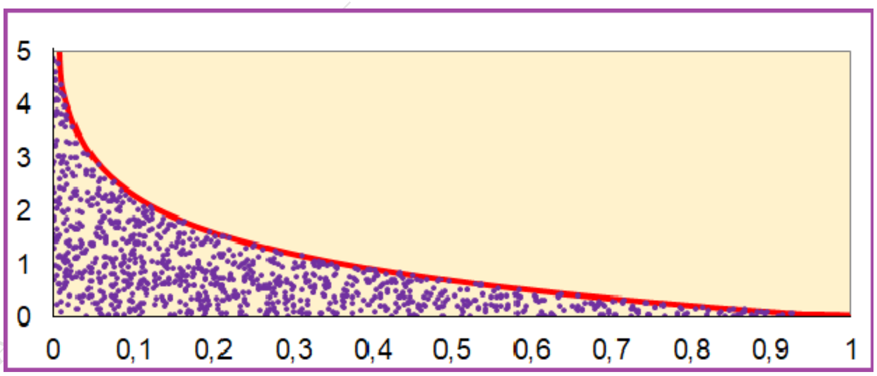
$$\mathrm{P}(\, a \le Z \le b\,) = \int_a^b (\, -\ln z\,)\; dz$$



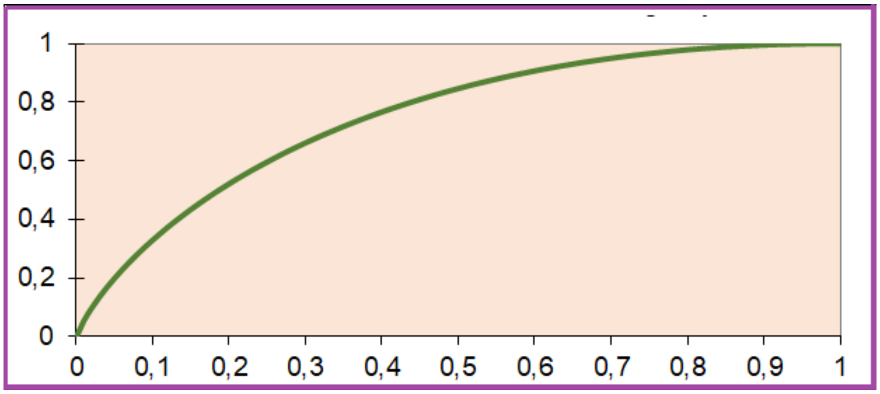
28. ábra. *Random számok szorzata: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



29. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



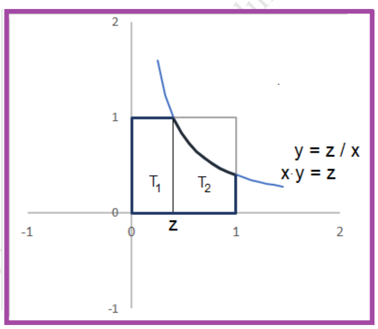
30. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



31. ábra. *Random számok szorzata: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: A $Z = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $(0 , 1)$ intervallumot teszik ki, ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < 1$.

Eloszlásfüggvény: Most is a kedvező kimenelek halmazának a területet kell meghatároznunk. Az $\mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 \leq z$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $x \cdot y = z$ egyenletű hiperbola alatti részt jelenti, ami az x -tengely z abszcisszájú pontjában húzott függőleges szakasszal két részre bontható: a baloldali rész egy téglalap, a jobboldali rész pedig egy "trapéz jellegű" halmaz, melynek a "tetejét" a hiperbola alkotja. Az alábbi ábrán a téglalapot T_1 -gyel, a "trapéz jellegű" halmazt T_2 -vel jelöljük:



32. ábra. *$RND_1 \cdot RND_2$ eloszlásfüfggvényének levezetése*

T_1 területe nyilván z -vel egyenlő. T_2 területe pedig integrálással számítható ki:

$$\int_{x=z}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=z/x} 1 \, dy \right) dx = \int_{x=z}^{x=1} z/x \;\; dx = -z \ln z$$

A két tag összege éppen $R(z)$ -t adja.

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) = F'(z) = (z - z \ln z)' = 1 - \ln z - z \, \frac{1}{z} = - \ln z \qquad (0 < z < 1)$$

3. Példa: Random számok hányadosa

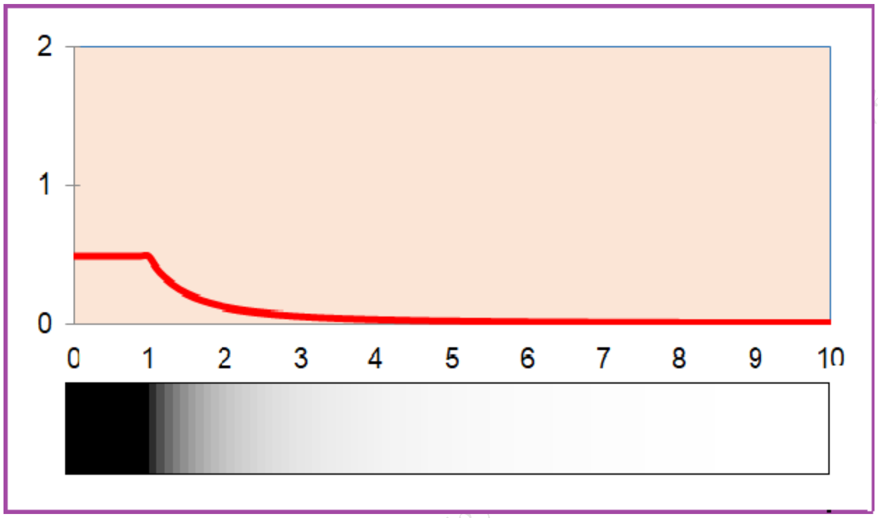
$$Z = \frac{\mathrm{RND}_2}{\mathrm{RND}_1}$$

Eloszlásfüggvény:

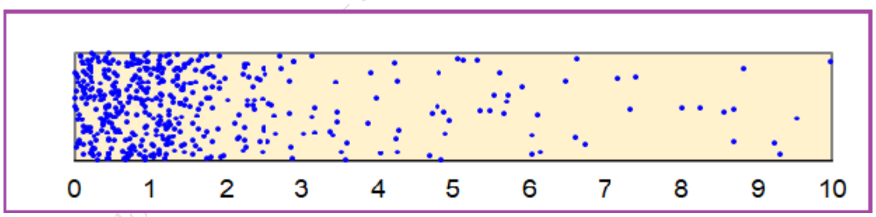
$$R(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1 - \frac{1}{2z} & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

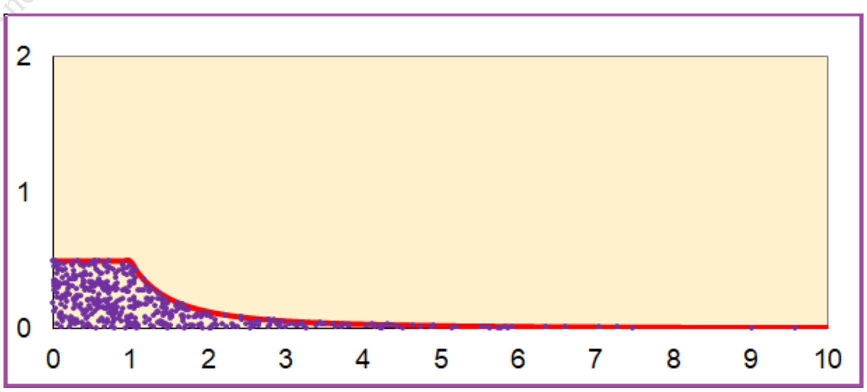
$$r(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$



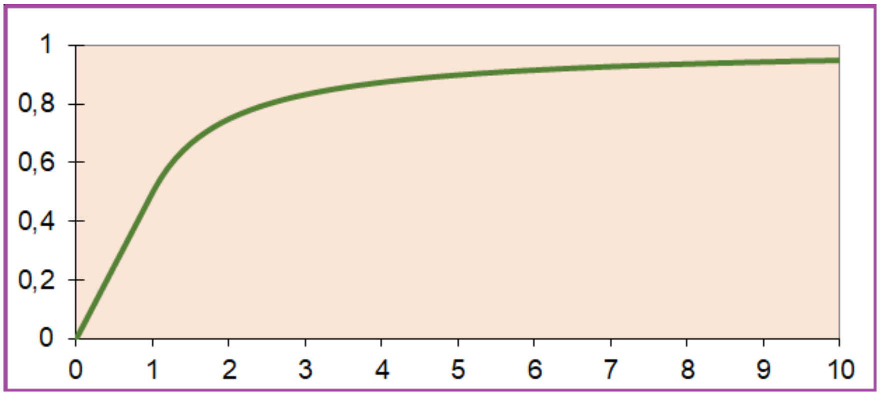
33. ábra. *Random számok hányadosa: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



34. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



35. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



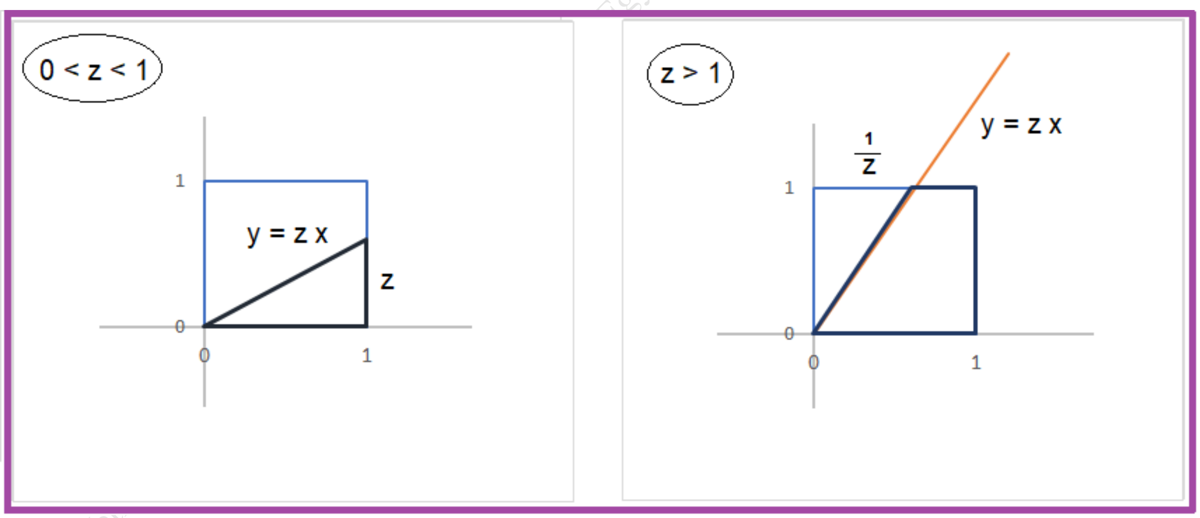
36. ábra. *Random számok hányadosa: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: A $Z = \mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1$ valószínűségi változó lehetséges értékei a $(0, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < z < \infty$.

Eloszlásfüggvény: Most is a kedvező kimenelek halmazának a területet kell meghatároznunk.

$$R(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \leq z) = \mathrm{P}(\mathrm{RND}_2 \leq z\,\mathrm{RND}_1)$$

Az $\mathrm{RND}_2 \leq z\,\mathrm{RND}_1$ esemény számára kedvező kimenetelek halmazát az egységnégyzet belsejében az $y = z \cdot x$ egyenletű egyenes alatti részt jelenti, ami $0 < z < 1$ esetén egy háromszög, $z > 1$ esetén egy trapéz:



37. ábra. *RND_2/RND_1 eloszlásfüfggvényének levezetése*

Két esetet kell most szétválasztanunk:

1. eset: $z \leq 1$. A háromszög területe nyilván $z/2$. Ezért

$$R(z) = z/2$$

2. eset: $z > 1$. A trapéz komplementere egy háromszög, melynek területe $1/(2z)$. Ezért

$$R(z) = 1 - 1/(2z)$$

Sűrűségfüggvény:

$$r(z) \;=\; F'(z) \;=\; \begin{cases} (\frac{z}{2})' \;=\; \frac{1}{2} & \text{ha} \;\; 0 \;<\; z \;<\; 1 \\[2ex] (1-\frac{1}{2z})' \;=\; \frac{1}{2z^2} & \text{ha} \;\; z \;>\; 1 \end{cases}$$

3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése

Két példát is mutatunk arra, hogy hogyan lehet a sűségfüggvényt közvetlenül meghatározni az eloszlásfüggvény kiszámolása nélkül. Számításaink minkét esetben arra épülnek, hogy az $($ RND$_1$, RND$_2$ $)$ kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlást követ az egységnyi területű

$$\{\, (x,y) : \;\; 0 \;\le\; x \;\le\; 1 \,, \;\; 0 \;\le\; y \;\le\; 1 \,\}$$

négyzetben.

3.3.1. Random számok összege

Ebben a részben a

$$Z \;=\; \text{RND}_1 + \text{RND}_2$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét vezetjük le. A sűrűség

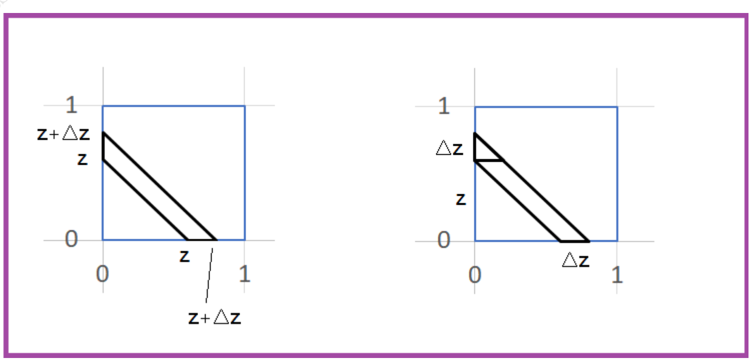
$$r(z) \;\approx\; \frac{\text{P}(\;\; z \;\le\; Z \;\le\; z + \Delta z \;\;)}{\Delta z}$$

jelentéséből indulunk ki, ahol Δz egy pici pozitív értéket jelöl. Két esetet tekintünk:

1. eset: $0 \;\le\; z \;\le\; 1$.
A számlálóban álló $z \;\le\; Z \;\le\; z + \Delta z$ eseménynek megfelel a négyzet

$$z \;\le\; x + y \;\le\; z + \Delta z$$

egyenlőtlenségekkel definiált részhalmazának. Ez egy trapéz, amit az alábbi ábra bal oldalán vastagítva láthatunk:



38. ábra. *Balra: a trapéz. Jobbra: a trapéz felbontása egy paralellogramma és egy háromszög egyesítésére*

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez a trapéz előáll egy paralellogramma és egy háromszög egyesítéseként. A paralellogramma alapjának hossza Δz, magassága z, ezért területe $z \cdot \Delta z$. A háromszög egy derékszögű háromszög Δz hosszúságú befogókkal, ezért területe $\frac{(\Delta z)^2}{2}$. Így a trapéz területe

$$z \cdot \Delta z \; + \; \frac{(\Delta z)^2}{2}$$

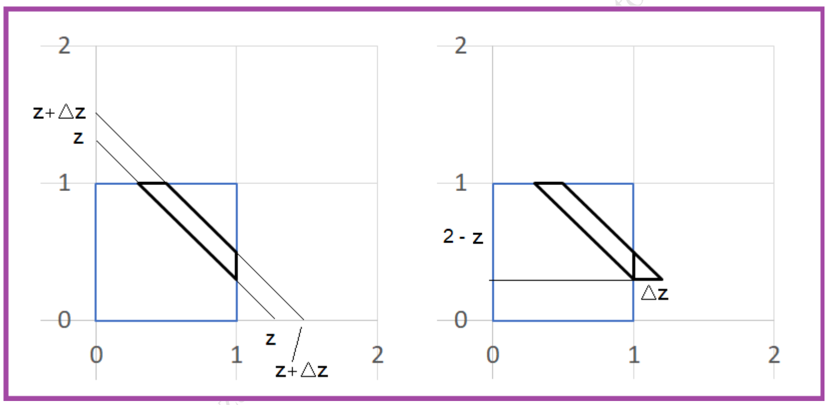
ami egyben a fenti tört számlálójában álló valószínűséggel is egyenlő. Ezért

$$r(z) \; \approx \; \frac{z \cdot \Delta z \; + \; \frac{(\Delta z)^2}{2}}{\Delta z} \; = \; z \; + \; \frac{\Delta z}{2} \; \approx \; z$$

2. eset: $1 \; \leq \; z \; \leq \; 2$.
A számlálóban álló $z \; \leq \; Z \; \leq \; z + \Delta z$ eseménynek megfelelő,

$$z \; \leq \; x + y \; \leq \; z + \Delta z$$

egyenlőtlenségekkel definiált részhalmaz most is egy trapéz, csak máshol helyezkedik el a négyzetben. Az alábbi ábra bal oldalán vastagítva láthatjuk:



39. ábra. *Balra:* ***a trapéz*** . *Jobbra: a trapéz előállítása egy paralellogramma és egy háromszög különbségeként*

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez a trapéz előáll egy paralellogramma és egy háromszög különbségeként. A paralellogramma alapjának hossza Δz, magassága $2 - z$, ezért területe $(2 - z) \cdot \Delta z$. A háromszög egy derékszögű háromszög Δz hosszúságú befogókkal, ezért területe $\frac{(\Delta z)^2}{2}$. Így a trapéz területe

$$(2 - z) \cdot \Delta z \; - \; \frac{(\Delta z)^2}{2}$$

ami egyben a fenti tört számlálójában álló valószínűséggel is egyenlő. Ezért

$$r(z) \; \approx \; \frac{(2 - z) \cdot \Delta z \; - \; \frac{(\Delta z)^2}{2}}{\Delta z} \; = \; (2 - z) \; - \; \frac{\Delta z}{2} \; \approx \; 2 - z$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$r(z) \; = \; \begin{cases} z & \text{ha} \;\; 0 \; \leq \; z \; \leq \; 1 \\ \\ 2 - z & \text{ha} \;\; 1 \; \leq \; z \; \leq \; 2 \end{cases}$$

3.3.2. Két random szám maximuma

Ebben a részben a

$$Z = \max(\text{RND}_1, \text{RND}_2)$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét vezetjük le. Természetesen most is a sűrűség

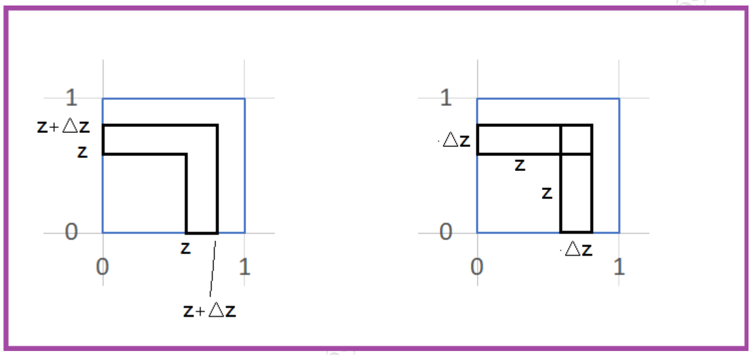
$$r(z) \approx \frac{\text{P}(\ z \leq Z \leq z + \Delta z\ )}{\Delta z}$$

jelentéséből indulunk ki, ahol Δz egy pici pozitív értéket jelöl.

A számlálóban álló $z \leq Z \leq z + \Delta z$ eseménynek megfelel az egységnégyzetnek az a részhalmaza, melyet

$$z \leq \max(x, y) \leq z + \Delta z$$

egyenlőtlenségek definiálnak. Ez egy L-alakú halmaz, amit az alábbi ábra bal oldalán láthatunk:



40. ábra. *Balra:* ***az L-alakú halmaz****. Jobbra: a halmaz felbontása két téglalap és egy négyzet egyesítésére*

Mint az ábra jobb oldalán leolvasható, ez az L-alakú halmaz előáll két téglalap és egy négyzet egyesítéseként. A téglalapok egyik oldalának a hossza z, a másiké Δz, ezért egy-egy téglalap területe $z \cdot \Delta z$. A négyzet területe nyilván $(\Delta z)^2$. Így az L-alakú halmaz területe

$$2 \cdot z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2$$

Ezért

$$r(z) \approx \frac{2 \cdot z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2 \cdot z + \Delta z \approx 2 \cdot z$$

Ez azt jelenti, hogy

$$r(z) = 2 \cdot z \qquad \text{ha} \quad 0 \leq z \leq 1$$

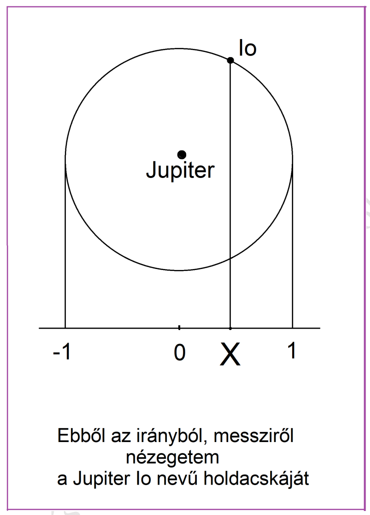
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások

Tegyük fel, hogy egy pontszerű test körpályán mozog konstans szögsebességgel, és mi egy véletlen időpillanatban tekintjük a részecske helyét a kör kerületén. Mivel a mi időpillanatunk véletlenszerű, az észlelt hely egy véletlenszerű pont a kör kerületén. Ha a mi véletlenszerű időpillanatunk semmi módon nincs kapcsolatban a pont mozgásával, akkor az így választott véletlen pont eloszlását kézenfekvő egyenletes eloszlásnak elfogadni.

3.4.1. Arkusz-színusz eloszlás

Szeretem távcsővel nézegetni a Jupiter holdjait, melyeket Galileo Galilei fedezett fel a 17. század elején. A neveik: Io, Európa, Ganümédész (latinul: Ganymedes), Kallisztó (latinul: Callisto). A holdak a Jupiter körül keringenek közelítőleg körpályán egyenletes sebességgel, gyakorlatilag egy síkban. Ebben a síkban a Föld is benne van, ezért a körlapot úgy látom, mintha egy korongot az éle felől néznék. Ezért a holdacskák mozgását nem körmozgásnak érzékelem: úgy látom, mintha egy szakaszon periodikusan mozognának: egyszer jobbra, máskor balra. A szakasz egyik vége a Jupiter baloldalán van, a másik a jobboldalán, és a holdacskák látszólag ezen a szakaszon mászkálnak. Ha a körpálya sugarát választjuk egységnek, és a szakasz középpontját 0 -nak, akkor a szóbanforgó szakasz a $[-1;1]$ intervallum.

Tegyük fel, hogy felismerem a holdakat, és – mondjuk – mindig csak az Io helyzetét figyelem, a másik három holdacskával nem törődök. Ha egy véletlenszerű időpontban tekintem az Io-t, akkor a látszólagos helyzetét a $[-1;1]$ intervallumon jellemezhetem egy véletlen X valós számmal.



41. ábra. *Az X valószínűségi változó definíciója*

X egy folytonos valószínűségi változó. Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ X ? A válasz:

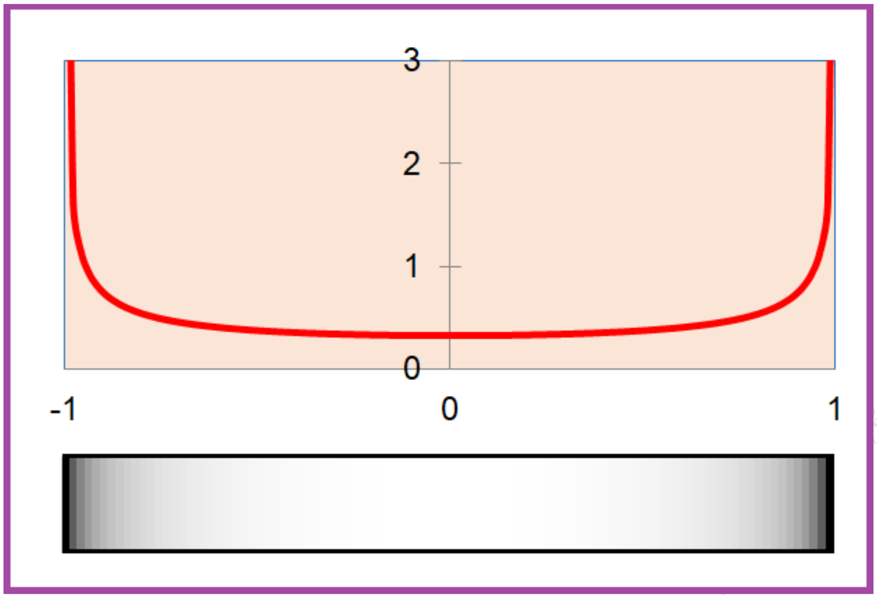
Eloszlásfüggvény:

$$F(x) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arcsin}(x) \qquad (\,-1 \;<\; x \;<\; 1\,)$$

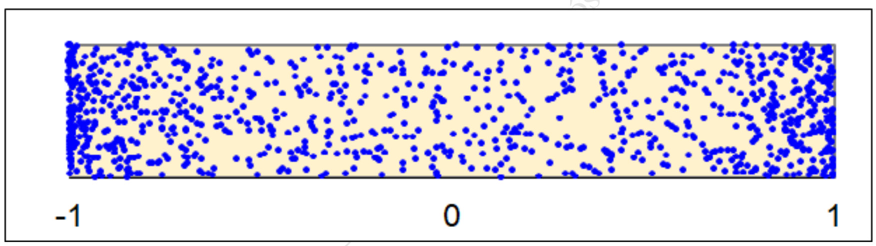
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\,-1 \;<\; x \;<\; 1\,)$$

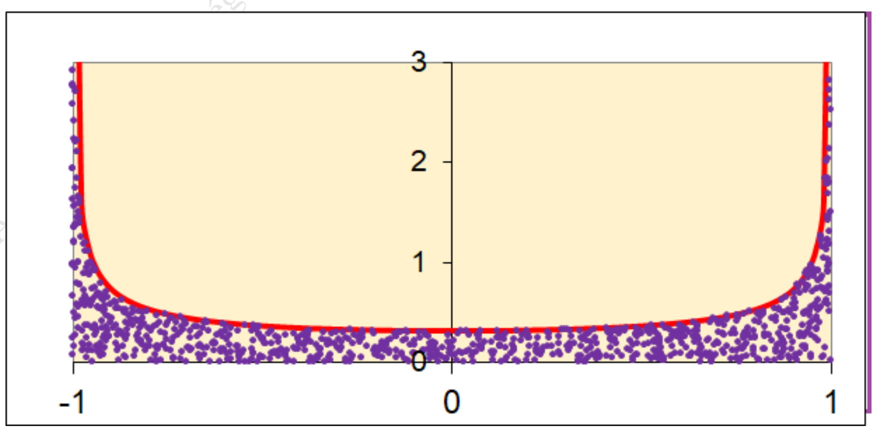
Az eloszlás a nevét az eloszlásfüggvény képletében szereplő arkusz-színusz fügvénytől kapta: **arkusz-színusz eloszlás**.



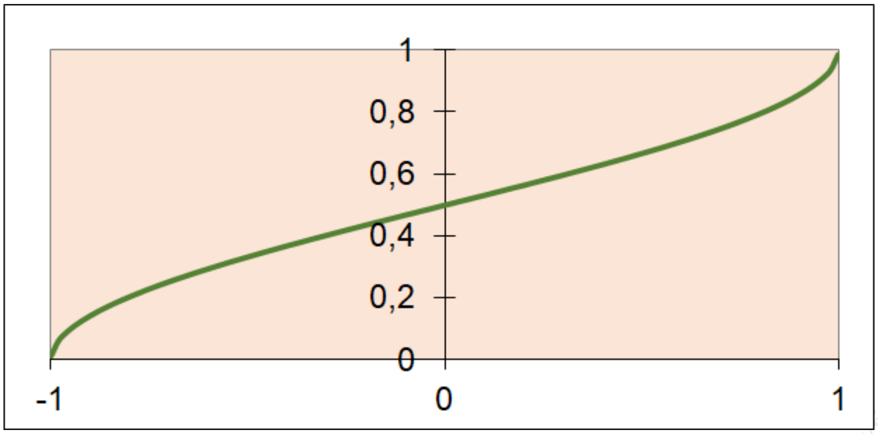
42. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



43. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



44. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



45. ábra. *Arkusz-színusz eloszlás: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása:

Mivel a Jupiter körüli körpályán a hozzám közelebbi "alsó félkör" és a tőlem távolabbi "felső félkör" a Földről nézve egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a "felső távolabbi" félkörre szorítkozni. Vagyis úgy vehetjük, hogy az Io helyzete abban a véletlenszerű időpillanatban, amikor a távcsövemmel nézem, *egyenletes eloszlású* ***a felső félkörön***.

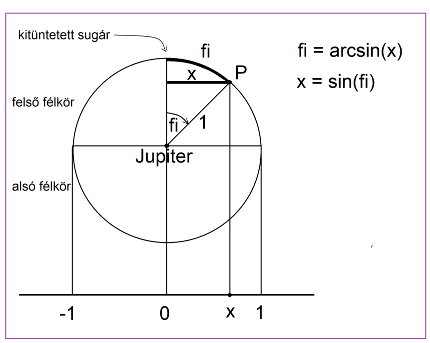
A következő gondolatmenetben kitüntetett szerepet kap az sugár, melyet a Jupiterből indítva a felső félkörív közepéhez húzhatunk: a többi sugarat azzal a ($-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső) szöggel fogjuk jellemezni, melyet ezzel a kitünetett sugárral bezárnak.

Eloszlásfüggvény: Válasszunk egy x számot -1 és 1 között. X eloszlásfüggvényének az x helyen vett értékét, vagyis az $X \leq x$ esemény valószínűségét szeretnénk meghatározni. E célból először keressük meg az x -nek megfelelő P pontot a felső félköríven, és aztán rajzoljuk be a Jupitertől a P ponthoz húzható sugarat, lásd a lentebbi ábrát! Ennek a sugárnak a kitüntetett sugárral bezárt szögét jelöljük ϕ -vel.

Egyszerű trigonometriai tény, hogy x és ϕ között fennállnak az

$$x = \sin(\phi) \qquad \phi = \arcsin(x)$$

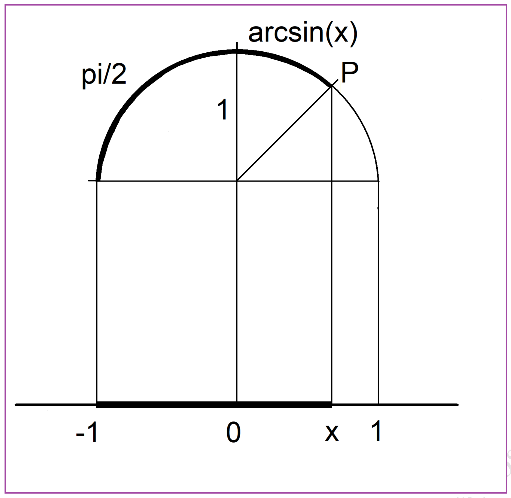
összefüggések – lásd a alábbi ábrát:



46. ábra. *Az ábráról leolvashatók a* $x = \sin(\phi)$, $\phi = \arcsin(x)$ *összefüggések*

Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz

- a $[-1;1]$ intervallumon belül az x -től balra eső $[-1;x]$ intervallum,
- a felső félkörön belül a P ponttól balra eső körív, melynek hossza $\pi/2+$ arcsin(x) :



47. ábra. *Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz a felső félkörön belül egy körív*

$F(x)$ értéke egyenlő ennek a körívnek a hossza osztva a felső félkör hosszával:

$$F(x) = \mathrm{P}(\ X \leq x\ ) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x)$$

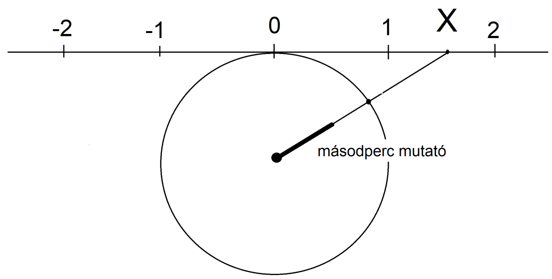
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Megjegyzés: Egy színuszosan váltakozó váltóáram pillanatnyi feszültségét véletlenszerű pillanatban véve nyilván arkusz-színusz eloszlású valószínűségi változót kapunk.

3.4.2. Cauchy eloszlás

Képzeljük el, hogy valaki egy hosszú egyenes fal elé letesz a földre egy hagyományos, kör alakú órát, és azt vizsgálja, hogy az egyenletes szögsebességgel forgó (tehát nem ugrabugráló) másodperc mutató által definiált egyenes hol metszi a falat. Az óra középpontjának a faltól való távolságát vesszük hosszegységnek. Ezzel a hosszegységgel a falon elképzeljük a számegyenest. Ha véletlenszerű időpontban tekintjük a metszéspont, akkor a metszéspontnak a helyzete a falra rajzolt számegyenesen egy számot definiál, ami számunkra egy X valószínűségi változót jelent:



48. ábra. *Az* X *valószínűségi változó definíciója*

Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ az X valószínűségi változó? A válasz:

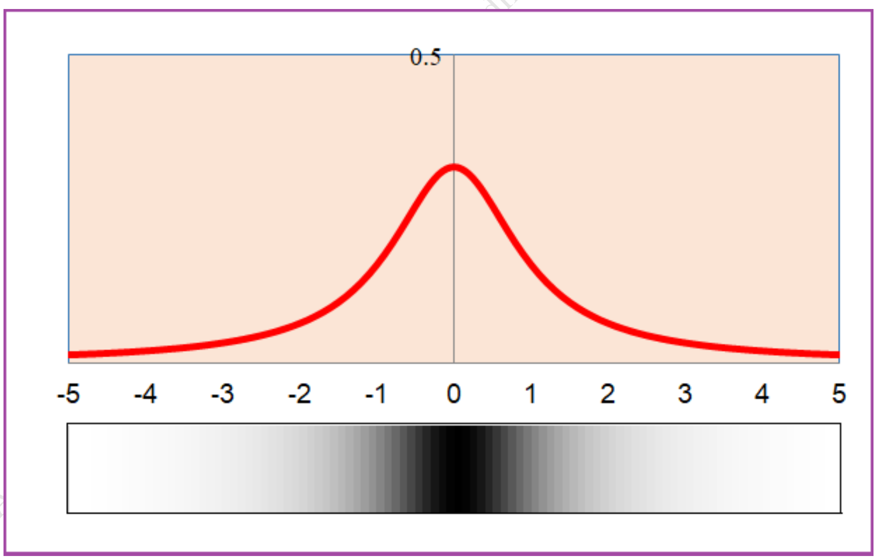
Eloszlásfüggvény:

$$F(x) \;=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctan}(x) \qquad (\,-\infty \;<\; x \;<\; \infty\,)$$

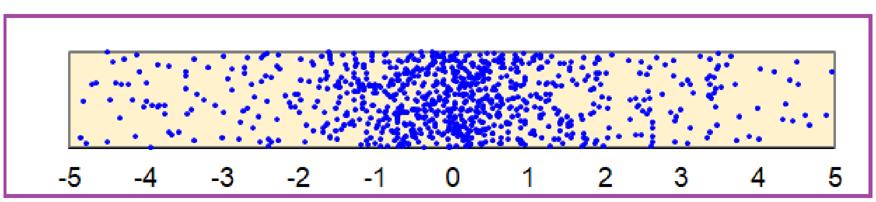
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad (\,-\infty \;<\; x \;<\; \infty\,)$$

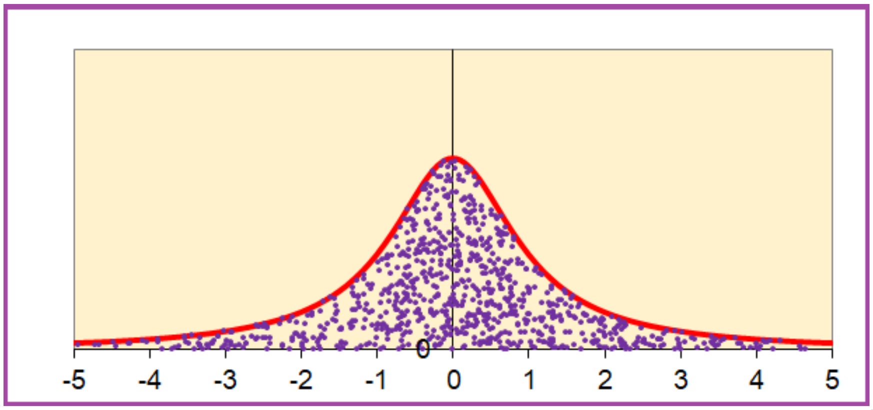
Az eloszlást jogos lenne arkusz-tangens eloszlásnak hívni, de a neve mégis: **Cauchy eloszlás**.



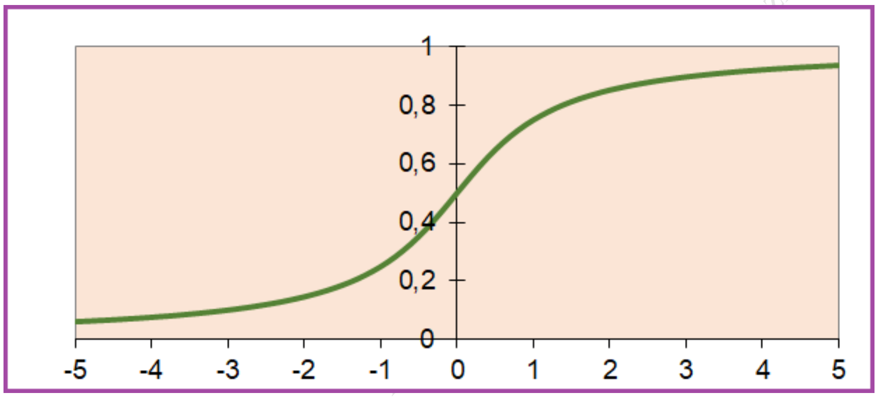
49. ábra. *Cauchy eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



50. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



51. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



52. ábra. *Cauchy eloszlás: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: Mivel az óra lapján az "alsó félkör" és a "felső félkör" egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a felső félkörre szorítkozni. Vagyis úgy vehetjük, hogy a kör kerületén a másodperc mutató által kijelölt pont *egyenletes eloszlású **a felső félkörön***.

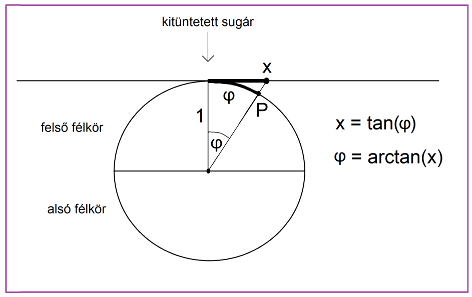
A következő gondolatmenetben kitüntett szerepet kap az sugár, melyet az óra középpontjából a felső félkörív közepéhez húzhatunk: a többi sugarat azzal a ($-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső) szöggel fogjuk jellemezni, melyet ezzel a kitünetett sugárral bezárnak.

Eloszlásfüggvény: Válasszunk egy x valós számot. X eloszlásfüggvényének az x helyen vett értékét, vagyis az $X \leq x$ esemény valószínűségét szeretnénk meghatározni. E célből először keressük meg az x -nek megfelelő P pontot a felső félköríven, és aztán rajzoljuk be az óra középpontjából a P ponthoz húzható sugarat, lásd a lentebbi ábrát! Ennek a sugárnak a kitüntetett sugárral bezárt szögét jelöljük ϕ -vel.

Egyszerű trigonometriai tény, hogy x és ϕ között fennállnak az

$$x = \tan(\phi) \qquad \phi = \arctan(x)$$

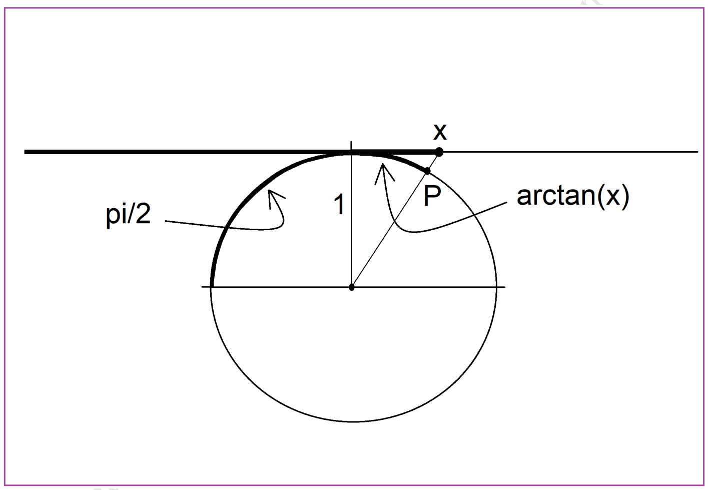
összefüggések – lásd a alábbi ábrát:



53. ábra. *Az ábráról leolvashatók a* $x = tan(\phi)$, $\phi = arctan(x)$ *összefüggések*

Az $X \leq x$ eseménynek megfelelő halmaz

- az érintő egyenesen: az x -től balra eső $[-\infty; x]$ intervallum,
- a felső félkörön: a P ponttól balra eső körív, melynek hossza $\pi/2 +$ arctan(x) :



54. ábra. *Az* $X \leq x$ *eseménynek megfelelő halmaz a felső félkörön belül egy körív*

$F(x)$ értéke egyenlő ennek a körívnek a hossza osztva a felső félkör hosszával:

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(\;X \;\leq\; x\;) \;=\; \frac{\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctan}(x)}{\pi} \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctan}(x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) \;=\; \left(\frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctan}(x)\right)' \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$$

3.5. Monoton transzformációk

Legyen $y = t(x)$ egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekedő függvény, melynek $x = t^{-1}(y)$ -nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha egy random számot behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet t(RND)-vel szokás jelölni:

$$Y = t(\text{RND})$$

Az Y , vagyis $t(\text{RND})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

1. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) = t^{-1}(y)$$

$$g(y) = \left(t^{-1}(y) \right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} < t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(\ Y < y\ ) = \text{P}(\ t(\text{ RND}) < y\ ) = \text{P}\left(\ \text{RND} < t^{-1}(y)\ \right) = t^{-1}(y)$$

A $G(y) = t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) = \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Legyenek x és y , illetve $x + \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y = t(x + \Delta x)$$

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x < \text{RND} < x + \Delta x$$

eseménnyel. Ezért

$$\text{P}(\ y < Y < y + \Delta y\ ) = \text{P}(\ x < \text{RND} < x + \Delta x\ )$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(\ x < \text{RND} < x + \Delta x\ ) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\text{P}(\ y < Y < y + \Delta y\ )}{\Delta y} = \frac{\text{P}(\ x < \text{RND} < x + \Delta x\ )}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx \left(t^{-1}(y) \right)'$$

2. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - t^{-1}(y)$$

$$g(y) = -\left(t^{-1}(y) \right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} > t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \mathrm{P}(\, Y < y\,) = \mathrm{P}(\; t(\text{ RND}) < y \;) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\ \text{RND} > t^{-1}(y)\ \right) = 1 - \mathrm{P}\left(\ \text{RND} < t^{-1}(y)\ \right) = 1 - t^{-1}(y)$$

A $G(y) = 1 - t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) = -\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x - \Delta x < \text{RND} < x$$

eseménnyel, ahol x és y , illetve $x - \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y = t(x - \Delta x)$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\, y < Y < y + \Delta y\,) = \mathrm{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x\,)$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x\,) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(\, y < Y < y + \Delta y\,)}{\Delta y} = \frac{\mathrm{P}(\, x - \Delta x < \text{RND} < x\,)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'$$

Az utolsó lépés azért igaz, mert a függvény szigorúan monoton csökkenő mivolta miatt

$$\left(\, t^{-1}(y)\,\right)' \approx -\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'$$

3.6. Folytonos szimuláció

Tegyük fel, hogy előírnak egy folytonos eloszlást, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan X valószínűségi változót, ami a megadott eloszlást követi. Egyenletes eloszlás esetén egyszerű a helyzet, hiszen a az Excelben angolul a `RAND()`, illetve magyarul a `VÉL()` utasítás olyan véletlen számot állít elő, ami a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követi. Ezért

- ha a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás: $X = \text{RND}$
- ha az $[5;15]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = 5 + 10 \cdot \text{RND}$
- ha az $[A;B]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = A + (B - A) \cdot \text{RND}$

Ha az előírt eloszlás nem egyenletes, akkor a módszer nem ennyire egyszerű. A következőképpen lehet eljárni:

Meghatározzuk az előírt eloszlás $F(x)$ *eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:*

$$X \;=\; F^{-1}(\text{RND})$$

Az eljárás igazolásául az előző alfejezetben tárgyaltakra lehet hivatkozni, mely szerint ha egy RND számot egy szigorúan monoton növekedő transzformációnak vetünk alá, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a transzformációs függvény inverze. Ezért, ha a transzformáció a megadott eloszlásfüggvény inverzével történik, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a megadott eloszlásfüggvény lesz.

Megjegyzés: Az itt megadott módszer nem az egyetlen módszer, más módszerekkel is elő lehet állítani a kívánt eloszlást követő valószínűségi változót. Példaképpen említjük, hogy az alábbiak szerint is eljárhatunk:

Meghatározzuk az előírt eloszlás $T(x)$ *jobboldali eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:*

$$X \;= T^{-1}(\text{RND})$$

3.7. Béta eloszlások

Válasszunk egy n és egy k számot úgy, hogy $1 \le k \le n$ teljesüljön. Ezek után tekintsünk n darab egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet!

Ugyanez a probléma kicsit életszerűbben:

Tegyük fel, hogy egy n tagú társaság tagjai egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint érkeznek a menzára dél (amit itt most 0 órának teintünk) és 1 óra között. Aki elsőnek megjön leül és vár a többire. Amikor a második megjön, kezet fognak. Amikor a harmadik megjön, udvariasan köszön a már ottlévő két barátjának. Amikor pedig a k -ik is megjön, hangos csatakiáltással üdvözlik őt. Jelöljük X -szel azt a pillanatot, amikor felhangzik a csatakiáltás!

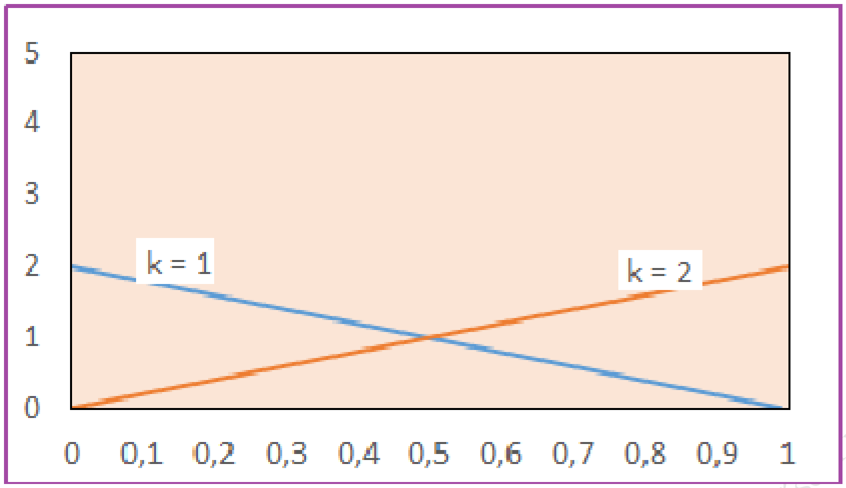
Az ilyen módon értelmezett valószínűségi változók eloszlásait nevezzük **béta eloszlás**oknak.

3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése

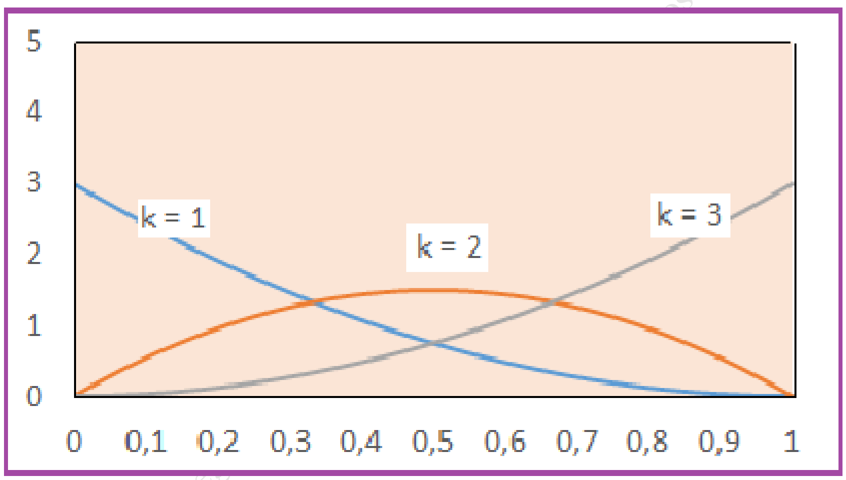
Memutatjuk, hogy X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\;\, x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad \text{ha} \;\; 0 \,<\, x \,<\, 1$$

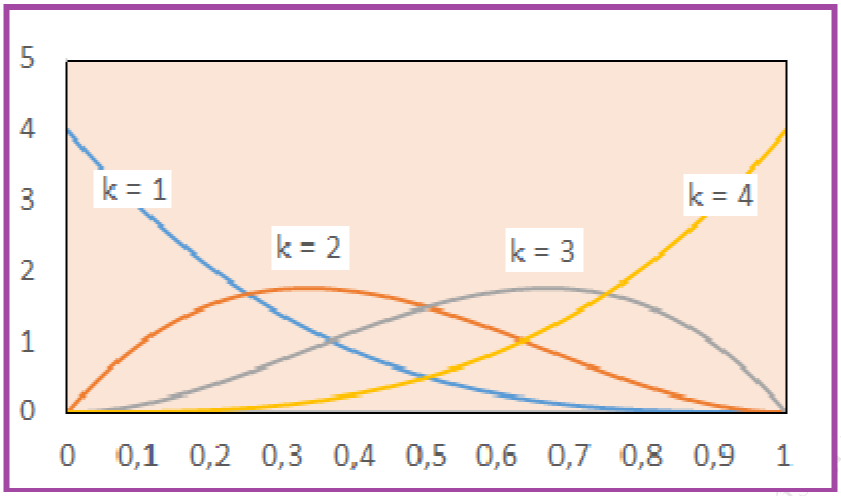
Megjegyzés: A béta eloszlásokat tetszőleges n -re és k -ra vezettük be. A kezdő számára ez így ijesztő lehet. Ennek kivédésére tanácsoljuk, hogy – fáradságot és időt nem kímélve – először néhány speciális esetre gondolja át a definíciót, végezzen kísérleteket, értse meg, hogy miről is van szó. Az következő négy ábrán $n \;= 2, 3, 4, 5$ és a lehetséges k értékekre a megadjuk a sűrűségfüggvények grafikonjait :



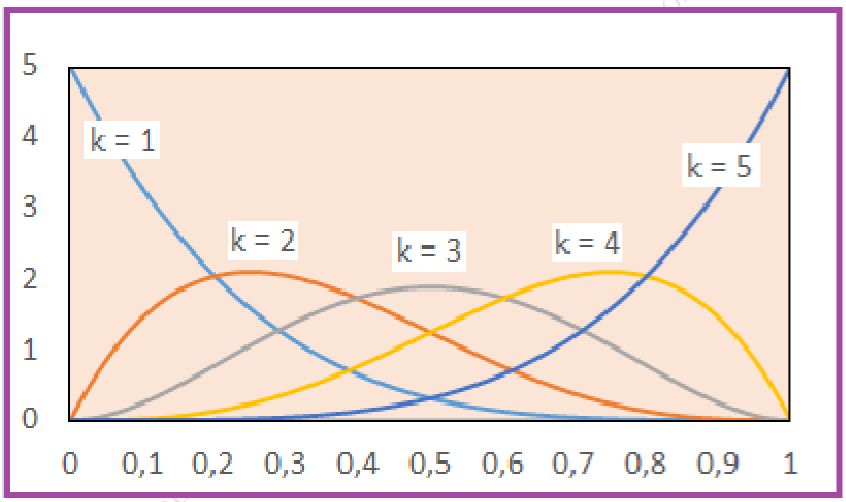
55. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 2,\ k = 1,\ k = 2$



56. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 3,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3$

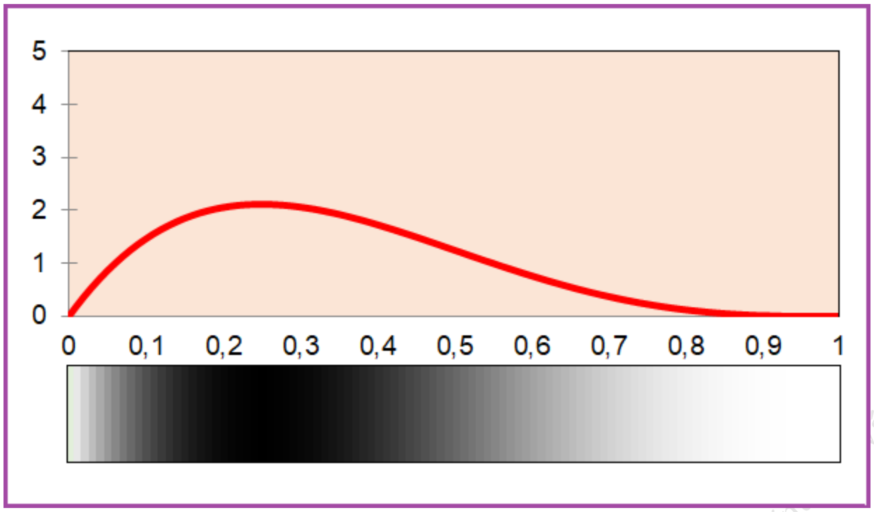


57. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $= 4,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4$

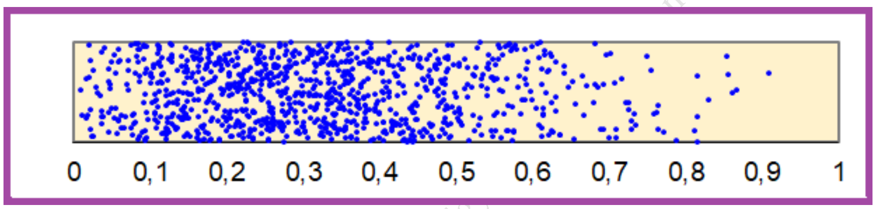


58. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 5,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4,\ k = 5$

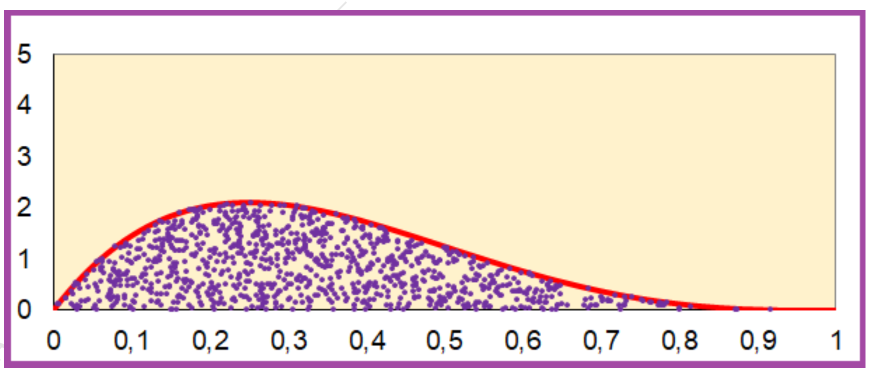
Az $n = 5,\ k = 2$ paraméter értékekre több ábrát is megadunk:



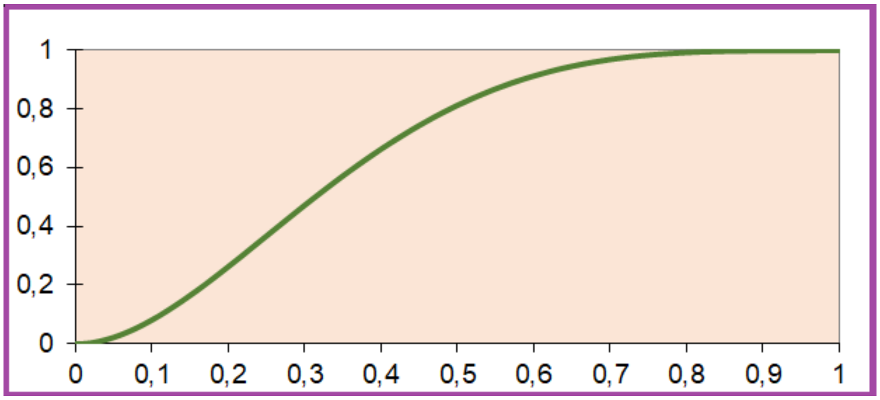
59. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



60. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



61. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



62. ábra. *Béta eloszlás* $n = 5,\ k = 2$ *: eloszlásfüggvény*

A sűrűségfüggvény képletének levezetése: Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x_1 \le X \le x_2\ )}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \le X \le x_2$ esemény azt jenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ X\ ]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ X\ ;\ 1\ ]$	intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ x_1\ ]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ x_2\ ;\ 1\ ]$	intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső random szám az n darab random szám akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab random szám az $n-1$ darab többi random szám közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$-gyel, vagyis a random számok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége

$$x_1^{k-1}\,(x_2 - x_1)\,(1 - x_2)^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x_1^{k-1}\,(x_2 - x_1)\,(1 - x_2)^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk $(x_2 - x_1)$ -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x_1^{k-1}\,(1 - x_2)^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\, x_1 \,,\, x_2 \,]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) \;=\; \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

1. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{5!}{1!\;3!}\, x^1\,(1-x)^3 \;=\; 20\,x\,(1-x)^3 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

2. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{5!}{2!\;2!}\, x^2\,(1-x)^2 \;=\; 30\,x^2\,(1-x)^2 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

3. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; \frac{10!}{6!\;3!}\, x^6\,(1-x)^3 \;=\; 840\,x^6\,(1-x)^3 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)$$

3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése

Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között. Meghatározzuk az eloszlásfüggvény értékét az x helyen:

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;\le\; x \;) \;=$$

$$= \mathrm{P}(\text{ a } k \text{ -ik legkisebb random szám } x \text{ -től balra van }) \;=$$

$$= \mathrm{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő random számok száma legalább } k \;) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } k \;) \;+ \\
&+ \mathrm{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } k+1 \;) \;+ \\
&\quad\vdots \\
&+ \mathrm{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } n-1) \;+ \\
&+ \mathrm{P}(\text{ az } x \text{ -től balra lévő random számok száma pontosan } n \;) \;=
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \;+\; \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \;+\; \ldots + \;\binom{n}{n-1} x^{n-1} (1-x)^1 \;+\; \binom{n}{n} x^n (1-x)^0$$

4. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \;=$$

$$= \binom{5}{2} x^2(1-x)^3 \; + \; \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \; + \; \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \; + \; \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 10\, x^2(1-x)^3 \; + \; 10\, x^3(1-x)^2 \; + \; 5\, x^4(1-x)^1 \; + \; x^5$$

5. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \; =$$

$$= \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \; + \; \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \; + \; \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 10\, x^3(1-x)^2 \; + \; 5\, x^4(1-x)^1 \; + \; x^5$$

6. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \; =$$

$$= \binom{10}{7} x^7(1-x)^3 \; + \; \binom{10}{8} x^8(1-x)^2 \; + \; \binom{10}{9} x^9(1-x)^1 \; + \; \binom{10}{10} x^{10}(1-x)^0 \; =$$

$$= \; 120\, x^7(1-x)^3 \; + \; 45\, x^8(1-x)^2 \; + \; 10\, x^9(1-x)^1 \; + \; x^{10}$$

Megjegyzés: A sűrűségfüggvény képletét természetesen megkaphatjuk az eloszlásfüggvény deriválásával. Gyakorlásképpen tessék bátran deriválni!

3.7.3. Nem-egyenletes alap-eloszlás esete *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy a pontokat a $[0,1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás helyett egy $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű folytonos *"alap"-eloszlás* szerint választjuk, ahol $A < x < B$ és $-\infty < A < B < \infty$. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet.

A sűrűségfüggvény képletének levezetése. Most erre az általánosabb esetre is levezetjük az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felveszünk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \; \approx \; \frac{\mathrm{P}(\; x_1 \; \le \; X \; \le \; x_2 \;)}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \le X \le x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\, x_1 \, ; \, x_2 \,]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \, ; \, x_2 \,]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \, ; \, X \,]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, X \, ; \, 1 \,]$	intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \, ; \, x_2 \,]$	intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \, ; \, x_1 \,]$	intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, x_2 \, ; \, 1 \,]$	intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső pont az n darab pont akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab pont az $n-1$ darab többi pont közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$ -gyel, vagyis a pontok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége közelítőleg

$$(\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\,(x_2-x_1)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\,(x_2-x_1)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk (x_2-x_1) -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x_1)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\ \cdot\ (\ 1-S(x_2)\ )^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \cdot\ (\ S(x)\ )^{k-1}\ \cdot\ s(x)\ \cdot\ (\ 1-S(x)\ )^{n-k} \qquad (A\ <\ x\ <\ B)$$

1. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x) = x^2$ $(0\ <\ x\ <\ 1)$ eloszlásfüggvényű, $s(x) = 2x$ $(0\ <\ x\ <\ 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 20\ \cdot\ x^2\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^3 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

2. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 30\,x^2\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^2 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

3. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x)\ =\ 840\ \left(\ x^2\ \right)^6\ \cdot\ 2x\ \cdot\ \left(\ 1-x^2\ \right)^3 \qquad (0\ <\ x\ <\ 1)$$

Az eloszlásfüggvény képletének levezetése. Az eloszlásfüggvény képletét is levezetjük. E célból felveszünk egy x pontot 0 és 1 között. Az eloszlásfüggvény jelentése miatt:

$$F(x)\ =\ \mathrm{P}(\ X\ \le\ x\ )\ =$$

$$=\ \mathrm{P}(\ \text{a } k \text{ -ik legkisebb pont } x \text{ -től balra van}\ )\ =$$

$$=\ \mathrm{P}(\ \text{az } x \text{ -től balra lévő pontok száma legalább } k\ )\ =$$

$$
\begin{aligned}
&= \ \mathrm{P}(\ \text{az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } k\ ) + \\
&+ \ \mathrm{P}(\ \text{az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } k+1\ ) + \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ \ \mathrm{P}(\ \text{az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } n-1\ ) + \\
&+ \ \mathrm{P}(\ \text{az } x \text{ -től balra lévő pontok száma pontosan } n\ ) \ =
\end{aligned}
$$

$$
= \binom{n}{k} \left(S(x) \right)^k \left(1 - S(x) \right)^{n-k} + \binom{n}{k+1} \left(S(x) \right)^{k+1} \left(1 - S(x) \right)^{n-(k+1)} + \dots
$$

$$
\dots + \binom{n}{n-1} \left(S(x) \right)^{n-1} \left(1 - S(x) \right)^1 + \binom{n}{n} \left(S(x) \right)^n \left(1 - S(x) \right)^0
$$

4. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{5}{2} \left(x^2 \right)^2 \left(1 - x^2 \right)^3 + \binom{5}{3} \left(x^2 \right)^3 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{5}{4} \left(x^2 \right)^4 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{5}{5} \left(x^2 \right)^5 \left(1 - x^2 \right.
$$

5. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{5}{3} \left(x^2 \right)^3 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{5}{4} \left(x^2 \right)^4 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{5}{5} \left(x^2 \right)^5 \left(1 - x^2 \right)^0
$$

6. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$
F(x) = \binom{10}{7} \left(x^2 \right)^7 \left(1 - x^2 \right)^3 + \binom{10}{8} \left(x^2 \right)^8 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{10}{9} \left(x^2 \right)^9 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{10}{10} \left(x^2 \right)^{10} \left(1 - \right.
$$

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)*

4.1. Definíciók

Ha az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor X **várható értéké**nek (angolul: *expected value*) definíciója:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Az $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ számot az $f(x)$ sűrűségfüggvényű *eloszlás* **várható értéké**nek is nevezzük.

Tetszőleges $y = t(x)$ függvény esetén az X -ből az $y = t(x)$ *transzformációval kapott* (Y -nal vagy $t(X)$ -szel jelölt) *valószínűségi változó* **várható értéke**:

$$\mathrm{E}(\ Y\ ) \ = \ \mathrm{E}(\ t(X)\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\, dx$$

Speciálisan, $t(x) = x^2$ esetén kapjuk az X **második momentum**át:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

A **variancia** (avagy más néven **szórásnégyzet)** definíciója :

$$\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} (\ x - \mathrm{E}(X)\ )^2\, f(x)\, dx$$

Végül a **szórás** (angolul: *standard deviation*) definíciója:

$$\mathrm{SD}(\ X\ ) = \sqrt{\mathrm{VAR}(\ X\ )}$$

Megjegyzések:

- A várható értéket gyakran szokták μ -vel, a varianciát σ^2 -tel, a szórást pedig σ -val jelölni.
- Látható, hogy egy valószínűségi változó várható értéke a folytonos esetben is ott van, ahol a megfelelő tömegeloszlás tömegközéppontja.
- A variancia (szórásnégyzet) annyi, amennyi a megfelelő tömegeloszlásnak a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.
- A variancia (szórásnégyzet) kiszámítása a folytonos esetben is a (diszkrét esetből már ismert)

  $$\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \mathrm{E}(\ X^2\ ) \ - \ (\ \mathrm{E}(\ X\ )\ )^2$$

  szabály alapján történhet.

4.2. Nagy számok törvényei

Fontosságuk miatt folytonos valószínűségi változókra – a szükséges módosításokkal – elismételjük a diszkrét valószínűségi változókra már megfogalmazott nagy számok törvényeit.

4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(X)$$

Vázlatos bizonyítás. Osszuk fel a számegyenest Δx hosszúságú kis intervallumokra! Ezután az osztópontokon egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis intervallum bal végpontjához hozzárendeljük az intervallumnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az x osztóponthoz tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x) \, dx$$

Az X valószínűségi változó megfigyelt értékeit az osztópontokra "lekerekítve" egy X^* diszrét valószínűségi változót kapunk: ha X értéke egy $[\, x \,, \, x + \Delta x \,)$ intervallumba esik, akkor X^* értékét x -nek vesszük:

$$X^* = x \qquad \text{ha} \qquad x \leq X < x + \Delta x$$

Az X^* lehetséges értékei az osztópontok. Minden egyes x osztópont esetén az $X^* = x$ esemény valószínűsége, vagyis X^* súlyfüggvényének az x helyen vett értéke, a fenti $p(x)$ érték. Mivel Δx kicsi, $p(x)$ -re igaz az alábbi közelítés:

$$p(x) \approx f(x) \, \Delta x$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx$$

$$\approx \frac{X_1^* + X_2^* + \ldots + X_N^*}{N} \approx$$

$$\approx \sum_x x \, p(x) \approx$$

$$\approx \sum_x x \, f(x) \, \Delta x \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

- Az első lépésben, amikor X -et X^* -gal helyettesítjük, a számláló minden tagjában legfeljebb Δx változás történik, ezért a két átlag is legfeljebb Δx -szel tér el egymástól.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az X^* diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyaráztuk, hogy a kísérleti eredmények átlaga közelíti a várható értéket.
- A harmadik lépésben a $p(x)$ -re felírt közelítést alkalmazzuk.

- A negyedik lépésben a szummát a megfelelő integrállal közelítjük.

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*:

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx$ integrál értéke véges szám, ami akkor és csak akkor teljesül, ha ez az integrál abszolút konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\; f(x)\;\, dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\,X\,)$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx$ integrál értéke plusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{konvergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{divergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; +\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx$ integrál értéke mínusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; -\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

4. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx$ integrál olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{is divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} x\, f(x)\;\, dx \quad \text{is divergens}$$

   Ekkor nem létezik olyan véges vagy végtelen c határérték, hogy $N \;\to\; \infty$ esetén az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; c$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy **a várható érték nem létezik**.

1. Megjegyzés: *(Extra tananyag)* A Cauchy eloszlásnak nem létezik a várható értéke, hiszen

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} x\, \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}\; dx \;=\; \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\; dx \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\; \left[\, \ln(1+x^2)\,\right]_0^{\infty} = \infty$$

és

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\; dx \;=\; -\int_{0}^{\infty} x\, f(x)\; dx \;=\; -\infty$$

Ez a tény nem azt jelenti, hogy a Cauchy eloszlás egy becstelen, csúnya eloszlás, hanem azt, hogy ha sok kísérletet végzünk Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra, akkor a kísérleti eredmények átlagáról nem állíthatjuk azt, hogy közel lesz valamilyen konstans értékhez. Más szóval: Cauchy eloszlást követő valószínűségi változó esetén a kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik egy bizonyos konstans körül.

2. Megjegyzés: *(Extra tananyag)* Ha valakinek kedve támad ahhoz, hogy számítógépes szimulációval ellenőrizze, hogy Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik, akkor ennél látványosabb élményben lesz része, ha nem Cauchy eloszlású valószínűségi változóval játszik, hanem – például – a sokkal "vadabbul viselkedő"

$$\frac{1}{(\ \mathrm{RND}\ -\ 0.5\ )^{5}}$$

valószínűségi változóval. Sok kísérlet kapcsán az átlagok sorozata őrületes módon fog vislekedni. Jó szórakozást!

Tessék a józan ész logikájával meggondolni, hogy miért vontunk ki RND -ből 0.5 -öt, miért emeltük a különbséget az 5. hatványra, és miért vettük mindennek a reciprokát!

4.2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha a kísérleti eredményeket egy $t(x)$ folytonos függvénybe helyettesítjük, majd az így kapott

$$t(X_1)\ ,\ t(X_2)\ ,\ \ldots, t(X_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\; dx \;=\; \mathrm{E}(\ \ t(X)\ \ )$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha a $t(x)$ függvény speciálisan az identitás függvény, azaz $t(x) \;=\; x$, akkor a most kimondott állítás a kísérleti eredmények átlagáról szóló, az előző pontban kimondott állításra redukálódik. Ezért a mostani állítás a korábbi általánosítása.

Vázlatos bizonyítás. Ez a vázlatos bizonyítás az előző pontban kifejtett bizonyítás kézenfekvő általánosítása. Osszuk fel most is a számegyenest Δx hosszúságú kis intervallumokra! Ezután az osztópontokon egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis intervallum bal végpontjához hozzárendeljük az intervallumnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az x osztóponthoz tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x) \;=\; \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\;\; dx$$

Az X valószínűségi változó megfigyelt értékeit az osztópontokra "lekerekítve" egy X^* diszrét valószínűségi változót kapunk: ha X értéke egy $[\ x\ ,\ x+\Delta x\ )$ intervallumba esik, akkor X^* értékét x -nek vesszük:

$$X^* = x \qquad \text{ha} \qquad x \;\le\; X \;<\; x+\Delta x$$

Az X^* lehetséges értékei az osztópontok. Minden egyes x osztópont esetén az $X^* = x$ esemény valószínűsége, vagyis X^* súlyfüggvényének az x helyen vett értéke, a fenti $p(x)$ érték. Mivel Δx kicsi, $p(x)$ -re igaz az alábbi közelítés:

$$p(x) \approx f(x)\,\Delta x$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \approx$$

$$\approx \frac{t(X_1^*) + t(X_2^*) + \ldots + t(X_N^*)}{N} \approx$$

$$\approx \sum_x t(x)\, p(x) \approx$$

$$\approx \sum_x t(x)\, f(x)\,\Delta x \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\; dx$$

- Az első lépésben, amikor X_i -t X_i^* -vel helyettesítjük, akkor minden i esetén az $X_i - X_i^*$ különbség legfeljebb Δx , vagyis kicsi, így a $t(x)$ függvény folytonossága miatt a $t(X_i) - t(X_i^*)$ különbség is kicsi, ezért a két átlag különbsége is kicsi.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az X^* diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyaráztuk, hogy a kísérleti eredmények függvényének az átlaga közelíti a felírt összeget.
- A harmadik lépésben a $p(x)$ -re felírt közelítést alkalmazzuk.
- A negyedik lépésben a szummát a megfelelő integrállal közelítjük.

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(\,X\,)\,) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\; dx$ integrál értéke véges szám, ami akkor és csak akkor teljesül, ha ez az integrál abszolút konvergens, azaz

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |t(x)|\; f(x)\; dx \quad \text{konvergens}$$

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \to \mathrm{E}(\, t(\,X\,)\,)$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(\,X\,)\,) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\; dx$ integrál értéke plusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

   $$\int_{-\infty}^{0} t(x)\, f(x)\; dx \quad \text{konvergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\, f(x)\; dx \quad \text{divergens}$$

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \to +\infty$$

   esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(\ X\ )\ )\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx$ integrál értéke mínusz végtelen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\int_{-\infty}^{0} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{konvergens}$$

Ekkor $N\ \to\ \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N}\ \to\ -\infty$$

esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő.

4. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx$ integrál olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{is divergens} \qquad \text{és} \qquad \int_{0}^{\infty} t(x)\, f(x)\ dx \quad \text{is divergens}$$

Ekkor nem létezik olyan véges vagy végtelen c határérték, hogy $N\ \to\ \infty$ esetén az

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N}\ \to\ c$$

esemény valószínűsége 1 -gyel egyenlő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy **ez a várható érték nem létezik**.

4.2.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}\ \approx\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx\ =\ \mathrm{E}(\ X^2\ )$$

Bizonyítás: Ha az előző részben speciálisan a $t(x) = x^2\ =$ függvényt vesszük, akkor azonnal megkapjuk az állítást.

4.2.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}\ \approx\ \mathrm{VAR}(\ X\ )$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\ X\ )$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(\ X_1 - \overline{X}\ )^2 + (\ X_2 - \overline{X}\ )^2 + \ldots + (\ X_N - \overline{X}\ )^2}{N}\ \approx$$

$$\approx \frac{(\,X_1 - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 + (\,X_2 - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 + \ldots + (\,X_N - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(\ X - \mathrm{E}(\,X\,)\ )^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(\,X_1 - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 + (\,X_2 - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 + \ldots + (\,X_N - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2}{N} \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} (\,x - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 f(x)\,dx \ = \ \mathrm{VAR}(\,X\,)$$

4.2.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények szórása körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(\,X_1 - \overline{X}\,)^2 + (\,X_2 - \overline{X}\,)^2 + \ldots + (\,X_N - \overline{X}\,)^2}{N}} \approx \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\,x - \mathrm{E}(\,X\,)\,)^2 f(x)\,dx} \ = \ \mathrm{SD}(\,X\,)$$

4.2.6. NSZT a mediánra

A mediánra vonatkozó NSZT a folytonos esetre is ugyanúgy érvényes, mint a diszkrét esetre: nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredményekből számított medián körülbelül az X eloszlásából számított (elméleti) mediánnal egyenlő.

1. Példa: Ha Excelben a `NORM.S.INVERZ(RAND())` utasítással standard normális eloszlást követő valósz sí-nűségi változót szimulálunk jó sok cellában, és a `MEDIAN(...)` utasítással megkeressük a szimulált eredmények mediánját, akkor körülbelül 0 -t fogunk kapni, hiszen a standard normális eloszlás elméleti mediánja a 0 .

2. Példa: Ha egy városban a közlekedési "piros-sárga-zöld" lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama) exponenciális eloszlást követ, és az élettartam mediánja 7.5 hónap, akkor sok lámpa élettartamát összegyűjtve a kapott adathalmaz mediánja körükbelül 7.5 hónap lesz.

4.3. Példa: Csónak bérbe adása extra haszonnal

Siófoki barátom leleményes fickó. Jól ismeri a Balatoni időjárási viszonyokat, a csónakkölcsönző nemtörődömségét, a külföldi túristák lelkületét, és egyetemista korában jól megtanulta a valószínűségszámítást. És ebből jól megél. Lássuk csak hogyan. Így:

Bérbe vesz egy csónakot reggel 9 -kor 2000 Ft/óra bérleti díjért valamilyen időtartamra, és azonnal bérbe adja egy külföldinek 3000 Ft/óra bérleti díjért ugyanerre az időtartamra azzal a kedvezménnyel, hogy ha közben kitör a vihar, akkor visszaveszi tőle a csónakot úgy, hogy ilyenkor a visszamaradó, elveszett időtartamra a külföldinek nem kell már fizetnie bérleti díjat. Ez az ajánlat fölöttébb csábítónak tűnik a külföldinek!

Ha például barátom 3.25 (három és egynegyed) óra időtartamra bérli ki a csónakot, de a vihar megjön 2.25 (kettő és egynegyed) óra múlva, akkor barátom fizet a csónakkölcsönzőnek $3.25 \cdot 2000 = 6500$ Ft -ot, de beszed a külfölditől $2.25 \cdot 3000 = 6750$ Ft -ot, ami neki 250 Ft hasznot hoz.

Ha a vihar – barátom nagy szerencséjére – csak késő délután jön meg, akkor a külfölditől $3.25 \cdot 3000 = 9750$ Ft -ot szed be, és ez neki 3250 Ft hasznot jelent.

Ha viszont a vihar – barátom balszerencséjére – már fél óra múlva kitör, akkor barátom jól ráfizet az ügyeskedésére: ebben az esetben az ő költsége 6500 Ft, de a külfölditől csak $0.5 \cdot 3000 = 1500$ Ft jár neki, ami -5000 Ft hasznot, azaz 5000 Ft veszteséget jelent neki.

Vegyük észre, hogy a haszon attól függ, hogy mikor jön a vihar. Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom bevétele a külfölditől

- $x < 3.25$ óra esetén $3000 \cdot x$ Ft
- $x > 3.25$ óra esetén $3000 \cdot 3.25 = 9750$ Ft

A két képletet egybe is olvaszhatjuk:

- $3000 \cdot \min(x, 3.25)$ Ft

Barátom kiadása nem függ x-től: a kiadás mindenképpen $2000 \cdot 3.25 = 6500$ Ft.

Tehát barátom haszna (= bevétel – kiadás) így függ x-től: $t(x) = 3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500$ Ft.

A vihar jövetele véletlentől függ. Tegyük fel, hogy 9 órától számítva X óra múlva jön a vihar, ahol X exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó 5 óra várható értékkel. Barátom – aki jól megtanulta a valószínűségszámítást – ki tudja számolni a haszon várható értékét:

$$\int_0^\infty t(x) \cdot f(x)\, dx \;=\; \int_0^\infty \left(3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500 \right) \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx \;=\; 669.3$$

Ha tehát barátom rendszeresen úgy taktikázik, ahogy fentebb leírtuk, akkor átlagosan kb. 670 Ft -ot nyer csónakonként.

Felmerül a kérdés: A 3.25 óra helyett lehetne-e olyan c időtartamot találni, ami nagyobb átlagos hasznot hoz?

Még jobb kérdés: Mennyi az a c időtartam, ami legnagyobb átlagos hasznot hozza?

Megoldás: Általánosabban kezeljük a problámát:

- Barátom A Ft/óra bérleti díjat fizet a csónakkölcsönzőnek.
- Barátom B Ft/óra bérleti díjat kap a külfölditől.
- Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom haszna
$$t(x) \;=\; B \cdot \min(x, c) - A \cdot c \qquad \text{Ft}$$
- 9 órától számítva a vihar jöveteléig eltelt X időtartam – mint valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$
- Barátom hasznának a várható értéke – természetesen – függ c-től, ezért $\mathrm{BHV}(c)$-vel jelöljük:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BHV}(c) \;&=\; \int_0^\infty t(x) \cdot f(x)\, dx \;=\; \int_0^\infty \left(B \cdot \min(x, c) - A \cdot c \right) \cdot f(x)\, dx \;= \\
&=\; \int_0^\infty B \cdot \min(x, c) \cdot f(x)\, dx \;-\; A \cdot c \;= \\
&=\; \int_0^c B \cdot x \cdot f(x)\, dx \;+\; \int_c^\infty B \cdot c \cdot f(x)\, dx \;-\; A \cdot c \\
&=\; B \cdot \int_0^c x \cdot f(x)\, dx \;+\; B \cdot c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx \;-\; A \cdot c
\end{aligned}$$

Idáig tartott a feladat megoldásának az a része, ami a valószínűségszámítási gondolkodásmódot mutatta be. A hátralévő rész a calculus eszközeivel megkeresi a BHV(c) függvény maximumhelyét.

- A $\mathrm{BHV}(c)$ függvény deriváltjának meghatározását segítendő emlékeztetünk az alábbi (itt most c szerinti) deriválási szabályokra:

$$\left(\int_0^c x \cdot f(x)\, dx \right)' = c \cdot f(c)$$

$$\left(\int_c^\infty f(x)\, dx \right)' = -f(c)$$

$$\left(c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx \right)' = 1 \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx + c \cdot (\ -f(c)\ )$$

  Ezeknek a szabályoknak a felhasználásával a

$$\mathrm{BHV}(c) = B \cdot \int_0^c x \cdot f(x)\, dx + B \cdot c \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx - A \cdot c$$

  kifejezés tagonkénti deriválása azt adja, hogy

$$\mathrm{BHV}'(c) = B \cdot (\ c \cdot f(c)\ ) + B \cdot \left(1 \cdot \int_c^\infty f(x)\, dx + c \cdot (\ -f(c)\ ) \right) - A \cdot 1 =$$

$$= B \cdot T(c) - A$$

  ahol a $T(c)$ függvény az X valószínűségi változó a jobboldali eloszlásfüggvényét jelenti a c helyen:

$$T(c) = \int_c^\infty f(x)\, dx$$

- A deriváltat nullával egyenlővé téve a

$$B \cdot T(c) - A = 0$$

  egyenletből azt kapjuk, hogy barátom számára a legkedvezőbb c érték eleget tesz a

$$T(c) = \frac{A}{B}$$

  egyenletnek.

- Nyilvánvaló, hogy
  - az egyenlet megoldásánál kisebb c esetén $\mathrm{BHV}'(c) > 0$
  - az egyenlet megoldásánál nagyobb c esetén $\mathrm{BHV}'(c) < 0$

  ezért az egyenlet megoldása a $\mathrm{BHV}(c)$ függvény maximumhelyét adja.

- Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel, akkor a jobboldali eloszlásfüggvény

$$T(c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$$

  Az

$$\mathrm{e}^{-\lambda c} = \frac{A}{B}$$

  egyenlet megoldása:

$$c = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{B}{A} \right)$$

- Ha X exponenciális eloszlást követ 5 óra várható értékkel, akkor $\lambda = \frac{1}{5}$. Ha még $A = 2000$, $B = 3000$, akkor

$$c = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{B}{A} \right) = 5 \cdot \ln\left(\frac{3000}{2000} \right) = 2.03 \text{ óra} \approx 2 \text{ óra } 2 \text{ perc} \approx 2 \text{ óra}$$

  Ezt a $c = 2.03$ értéket behelyettesítve a $\mathrm{BHV}(c)$ függvénybe haszon várható értékének a maximumát kapjuk:

$$\mathrm{BHV}(2.03) = 945.3 \quad \text{Ft}$$

- Tehát ha barátom 2 óra 2 perc időtartamra bérli ki és adja bérbe a csónakokat – a fentebb vázolt feltételek mellett –, akkor csónakonként átlagosan 945 Ft haszna van. (A dolog erkölcsi tartalmáról itt most nem ejtünk szót.)

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai *(– diszkrét és folytonos eset)*

A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságait a könyv 2. részének 8. fejezetében felsoroltuk. Annak ellenére, hogy akkor még nem tanultunk a folytonos modellekről, már ott megemlítettük, hogy *az ott felsorolt tulajdonságok diszkrét és folytonos valószínűségi változókra és eloszlásokra egyaránt igazak*.

A nem triviális állításokat ott – természetesen – csak a diszkrét esetre bizonyítottuk. A bizonyítások – tessék megnézni – kétdimenziós gondolatmeneteken alapultak, hiszen *kettős szummákkal* dolgoztunk. A bizonyításokat a folytonos esetre értelemszerűen át fogjuk majd ültetni a megfelelő *kettős integrálok* segítségével. Mivel a kétdimenziós folytonos modellek tárgyalására a könyv 4. részében kerül sor, ezeket a bizonyításokat is ott adjuk majd meg.

6. Nevezetes folytonos eloszlások

6.1. Exponenciális eloszlás

A λ paraméterű **exponenciális eloszlás**t a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \; > \; 0)$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \; > \; 0)$$

Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(x) = e^{-\lambda x} \qquad (x \; > \; 0)$$

Várható érték:

$$\mathrm{E}\,(\,X\,) \; = \; \frac{1}{\lambda}$$

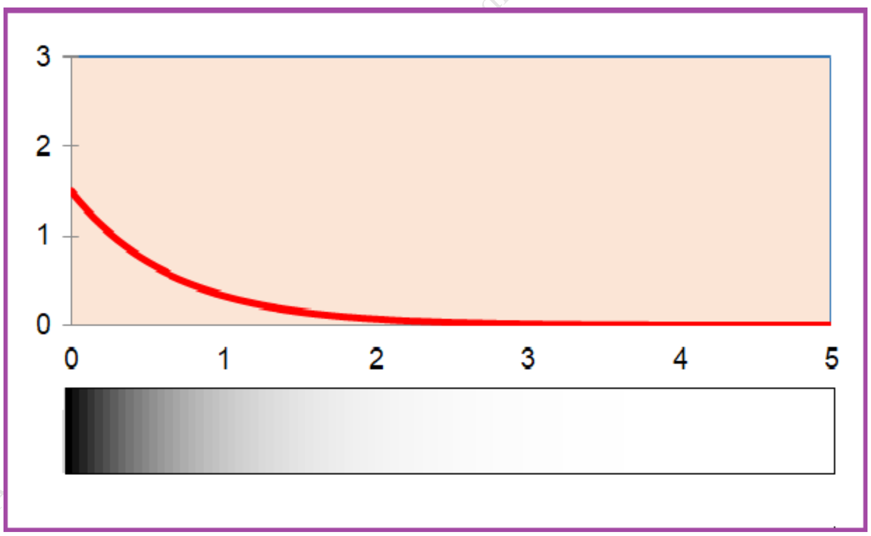
Szórás:

$$\mathrm{SD}\,(\,X\,) \; = \; \frac{1}{\lambda}$$

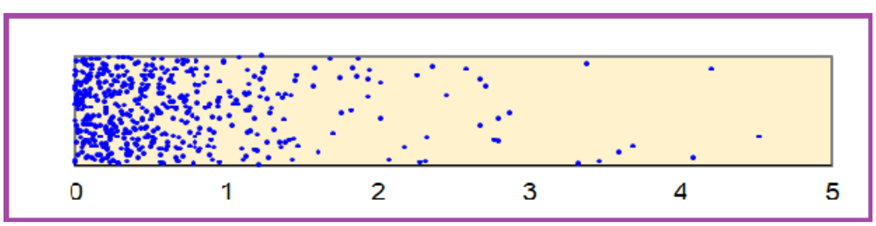
A λ paraméter pozitív valós szám lehet.

Jegyezzük meg, hogy exponenciális eloszlás esetén a paramétert megkaphatjuk a várható érték avagy a szórás reciprokaként:

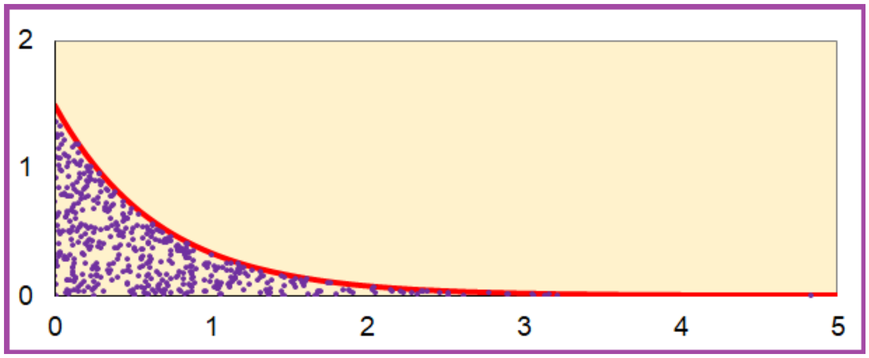
$$\lambda \; = \; \frac{1}{\mathrm{E}\,(\,X\,)} \; = \; \frac{1}{\mathrm{SD}\,(\,X\,)}$$



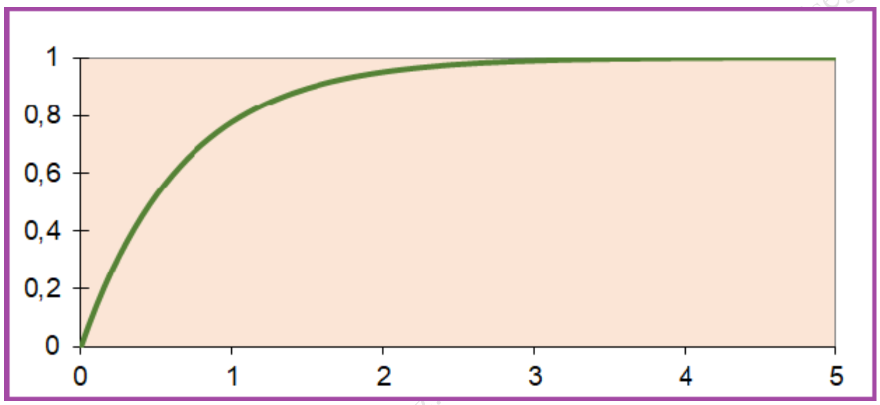
63. ábra. *Exponenciális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



64. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



65. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



66. ábra. *Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény*

6.1.1. Örökifjú tulajdonság

Egy X valószínűségi változóra, illetve egy folytonos eloszlásra azt mondjuk, hogy **örökifjú** tulajdonságú (más néven: **memória nélküli**), ha teljesül rá a következő:

$$\mathrm{P}(\ X > s+t \mid X > t\ ) = \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

minden $s,t \geq 0$ esetén. Fontossága miatt szavakban is elmondjuk a képlet értelmét: feltéve, hogy X nagyobb, mint t, annak a valószínűsége, hogy $X > s+t$, ugyanannyi, mint annak a (feltétel nélküli) valószínűsége, hogy $X > s$.

Példa: Poharak élettartama. Ha például X egy pohár élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság

> *"az élettartamnak a múltra vonatkozó érzéketlenségét fejezi ki"*:
>
> ha egy pohár már valamennyi – mondjuk t ideig – élt már (eddig még nem tört össze),
> akkor annak az esélye, hogy
> még további bizonyos – mondjuk s – ideig élni fog (addig nem fog összetörni)
> ugyanannyi, mint annak az esélye, hogy
> egy vadonatúj pohár ezt a bizonyos s időt túléli.

Tehát egy élő pohár kora nincs befolyással az ő további életének alakulására. Egy élő pohár – a további élethosszát illetően – olyan mint egy új pohár.

Állítás: Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Bizonyítás:
1. Az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.
Be akarjuk látni, hogy exponenciális eloszlás esetén fennáll az örökifjú tulajdonságot definiálló

$$\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t|X\ >\ t\ ) = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

összefüggés. Az egyenlőség baloldalán álló feltételes valószínűséget törtként írjuk fel:

$$\frac{\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t\ )}{\mathrm{P}(\ X\ >\ t\ )} = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

Ha az egyenletben a valószínűségeket mindhárom helyen átírjuk a $\mathrm{P}(\ X\ >\ x\ ) = e^{-\lambda x}$ összefüggés alapján, akkor az igazolandó egyenlőség az alábbi egyenlsőségbe megy át:

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Ez az egyenlőség pedig nyilván igaz, hiszen a baloldalon $e^{-\lambda t}$ -val egyszerűsítve kiadódik a jobboldal.
2. Csak az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.
A $\mathrm{P}(\ X\ >\ x\ )$ valószínűséget jelöljük $T(x)$ -szel. $T(x)$ -szel kapcsolatban leszögezünk néhány egyszerű tényt:

- $T(x) = 1 - F(x)$, azaz $F(x) = 1 - T(x)$
- $T(x)$ csökkenő függvény
- $T'(0)$ értéke negatív

Legyen $\lambda = -T'(0)$, azaz $T'(0) = -\lambda$. A

$$\frac{\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t\ )}{\mathrm{P}(\ X\ >\ t\ )} = \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

egyenletet így írhatjuk:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} = T(s)$$

Mindkét oldalon s szerint deriválva a

$$\frac{T'(s+t)}{T(t)} = T'(s)$$

egyenletet adódik. Ha most s helyére 0 -t helyettesítünk, akkor a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

differenciál egyenletet kapjuk. A differenciál egyenlet mindkét oldalát t szerint integálva ezt kapjuk:

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t + C$$

Mivel $T(0) = 1$, ezért $C = 0$. Így

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t$$

azaz

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

amiből kiadódik az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = 1 - T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

6.1.2. Exponenciális eloszlások alkalmazásai

1. Élettartamok: Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: ha egy adott pillanatban a szóbanforgó dolog „él”, akkor a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak. A múltja nincs hatása a jövőjére. Ameddig él, olyan, mint egy újszülött.

2. Várakozási idők: Bizonyos feltételek mellett a várakozási idők is expoenciális eloszlást követnek. Ezért a várakozási időket is gyakran modellezzük exponenciális eloszlással. Itt most megmutatjuk, ha egy városban, a forgalom éjjel-nappal folyamatosan állandó intenzitással dübörög, és valaki azt vizsgálja, hogy egy adott időpillanattól számolva mennyi időt kell várni az első baleseteig, akkor ez a várakozási idő exponenciális eloszlást követ valamilyen λ paraméterrel.

Az eloszlásfüggvények képletének levezetése: Minden x időtartammal kapcsolatban tekinthetjük azt a valószínűségi változót, ami azt mutatja, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban hány baleset történik. Világos, hogy adott x mellett ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ. A Poisson eloszlás paramétere nyilván függ a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallum hosszától. Ha a forgalom folyamatosan ugyanolyan körülmények között zajlik, akkor ennek a valószínűségi változónak a várható értéke arányos az x időtartam hosszával, vagyis λx -szel egyenlő, ahol λ az egységnyi hosszúságú időtartam alatti balesetek számának a várható értékét jelöli. Ezért annak a valószínűsége, hogy a $[\ 0\ ;\ x\ ]$ időintervallumban pontosan k baleset történik, egyenlő

$$\frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

-szel. Erre a képletre támaszkodik a következő számítás:

$$\text{P(az \textbf{első} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ baleset történik)} = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Tehát az első balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

vagyis *az első balesetig eltelt időtartam expoenciális eloszlást követ* λ *paraméterrel.*

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

EXPON.DIST(x ; λ ; FALSE)

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt pedig

EXPON.DIST(x ; λ ; TRUE)

6.1.3. Öregedő tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik az **öregedő tulajdonsággal**, ha

$$\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t \mid X\ >\ t\ )\ <\ \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

teljesül minden $s, t\ \geq\ 0$ esetén.

Példa az életből: Ilyen öregedő valószínűségi változó egy elhasználódó alkatrész (mondjuk gumiabroncs) élettartama. Egy használt abroncs nyilván rosszabb esélyekkel néz a jövő elébe, mint egy új.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $(x\ \geq\ 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá az öregedő tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\ X\ >\ s+t \mid X\ >\ t\ )\ <\ \mathrm{P}(\ X\ >\ s\ )$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)}\ <\ T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-(s+t)^2}}{\mathrm{e}^{-t^2}}\ <\ \mathrm{e}^{-s^2}$$

$$\mathrm{e}^{-(s+t)^2}\ <\ \mathrm{e}^{-t^2}\cdot\mathrm{e}^{-s^2}$$

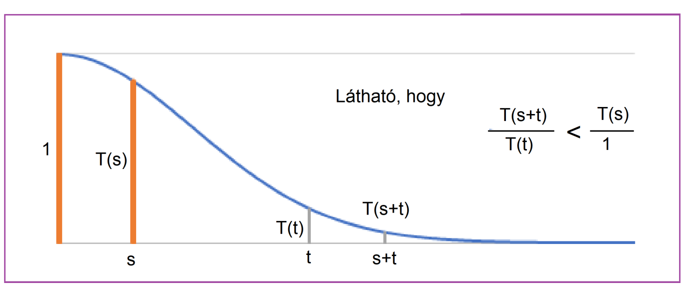
$$-(s+t)^2\ <\ -t^2-s^2$$

$$(s+t)^2\ >\ t^2+s^2$$

$$s^2+t^2+2st\ >\ t^2+s^2$$

$$2st\ >\ 0$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük az öregedés tényét:



67. ábra. *A $T(x) = e^{-x^2}$ $(x\ \geq\ 0)$ öregedő jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

6.1.4. Fiatalodó tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik a **fiatalodó tulajdonság**gal, amennyiben

$$\mathrm{P}(\, X > s+t \mid X > t\,) \;>\; \mathrm{P}(\, X > s\,)$$

minden $s, t \geq 0$ esetén.

Életből vett példa: Ilyen fiatalodó valószínűségi változó például egy elmaradott országban született csecsemő életének hossza. Ahogy a sorozatos veszélyeken túljut, egyre nő a további életbenmaradásának az esélye. Egy öregebb gyermek jobb esélyekkel bír a jövőre nézve, mint egy újszülött.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá a fiatalodó tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\, X > s+t \mid X > t\,) \;>\; \mathrm{P}(\, X > s\,)$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} > T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}} > \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}} > \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$-\sqrt{s+t} > -\sqrt{t} - \sqrt{s}$$

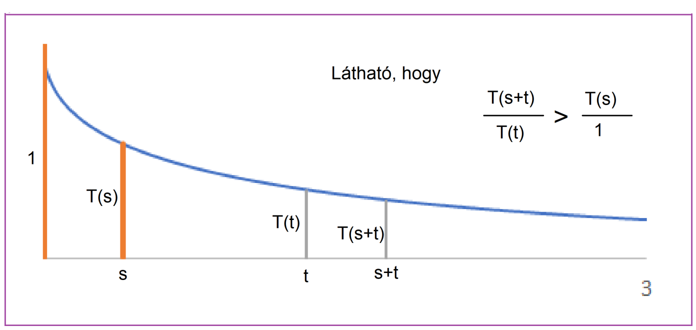
$$\sqrt{s+t} < \sqrt{t} + \sqrt{s}$$

$$\left(\sqrt{s+t} \right)^2 < \left(\sqrt{t} + \sqrt{s} \right)^2$$

$$s+t < s+t+2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

$$0 < 2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük a fiatalodás tényét:



68. ábra. *A* $T(x) = e^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$ *fiatalodó jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

6.2. Gamma eloszlás

Az n-ed rendű, λ paraméterű **gamma eloszlás**t az eloszlás- és a sűrűségfüggvény képletével definiáljuk.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Várható érték:

$$\mathrm{E}\,(\,X\,) \;=\; \frac{n}{\lambda}$$

Szórás:

$$\mathrm{SD}\,(\,X\,) \;=\; \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$$

Paraméterek: n pozitív egész, λ pozitív valós szám.

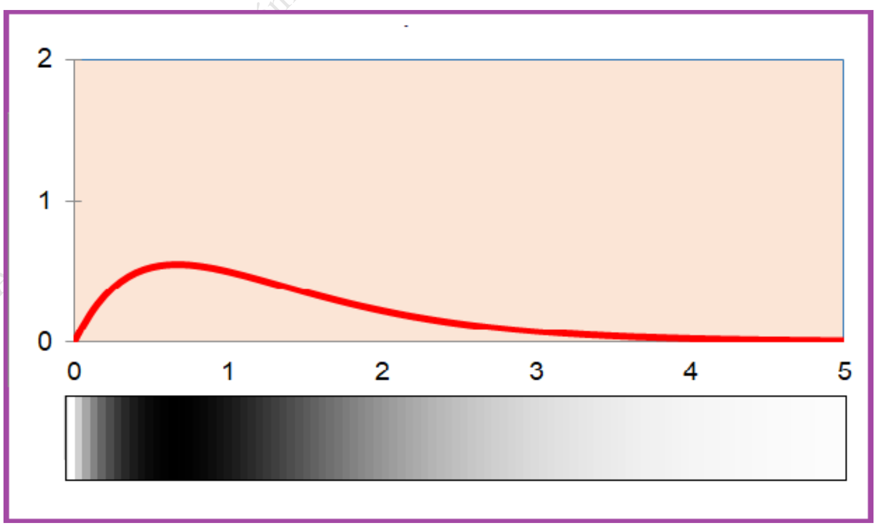
Az eloszlásfüggvény képletét $n = 1, 2, 3$ -ra szumma jel nélkül is felírjuk:

$n = 1$ -re: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (exponenciális eloszlás)

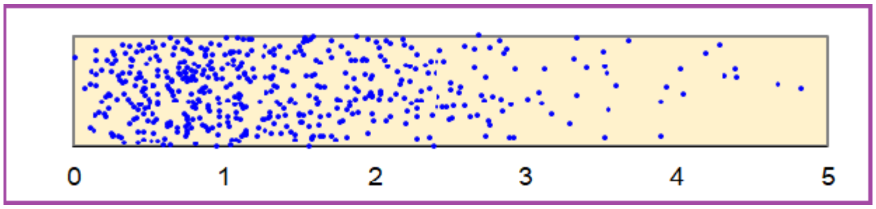
$n = 2$ -re: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}$

$n = 3$ -ra: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \dfrac{(\lambda x)^2}{2}\, e^{-\lambda x}$

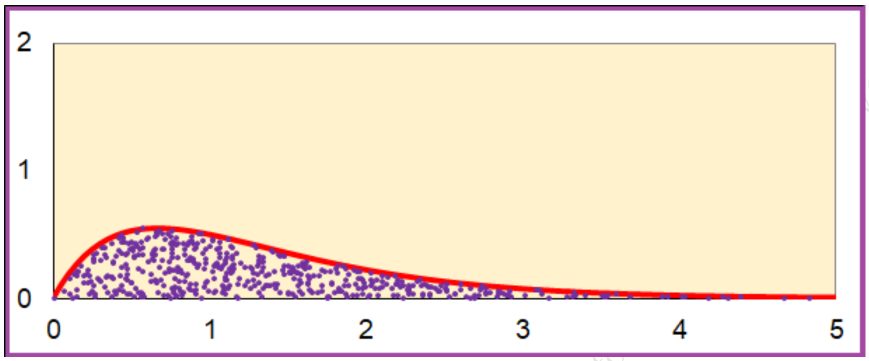
Másod rendű gamma eloszlás ábrái:



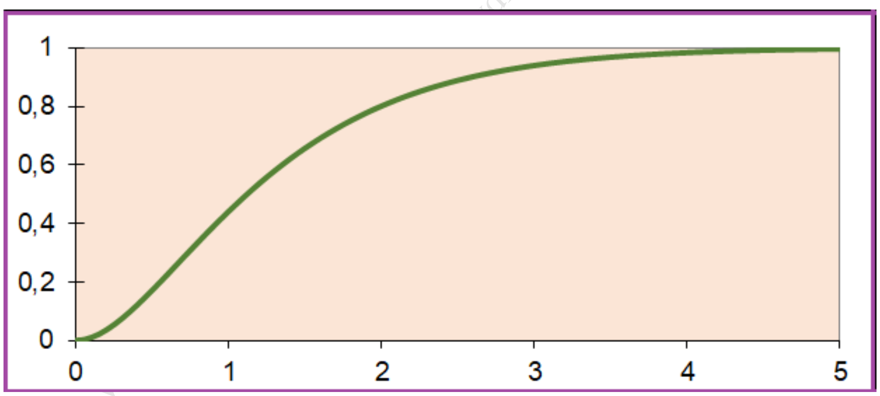
69. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



70. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*

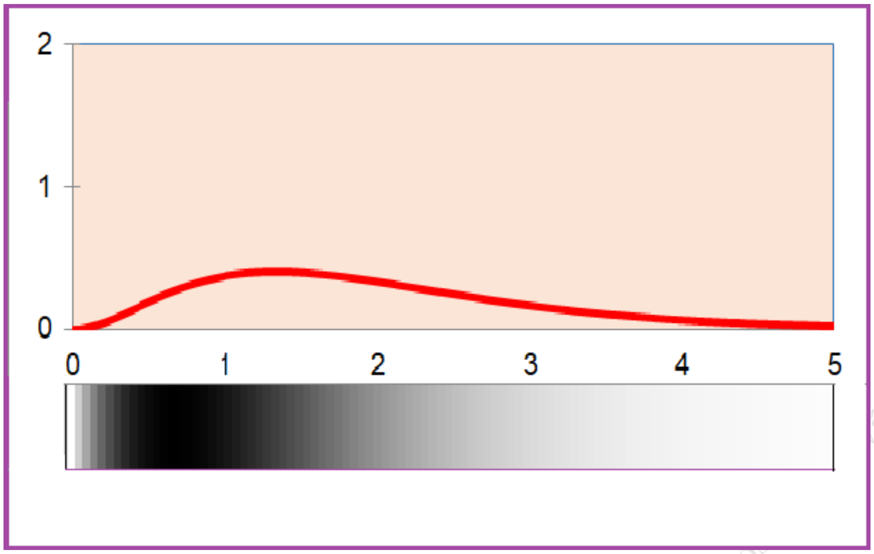


71. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*

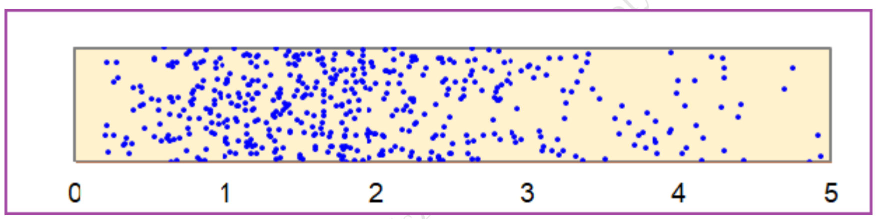


72. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$ *: eloszlásfüggvény*

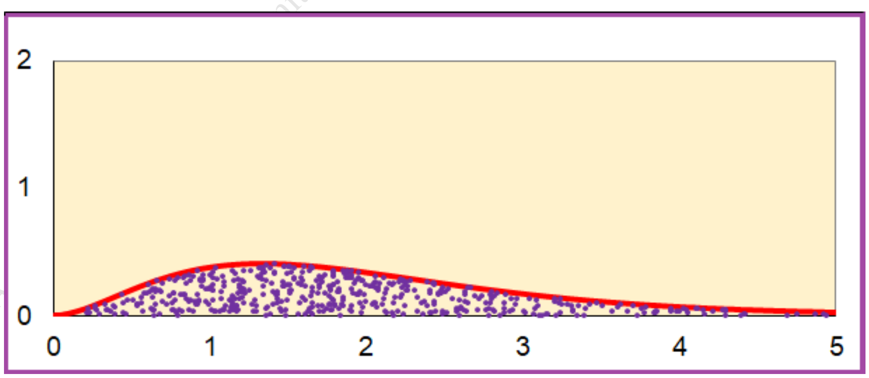
Harmad rendű gamma eloszlás ábrái:



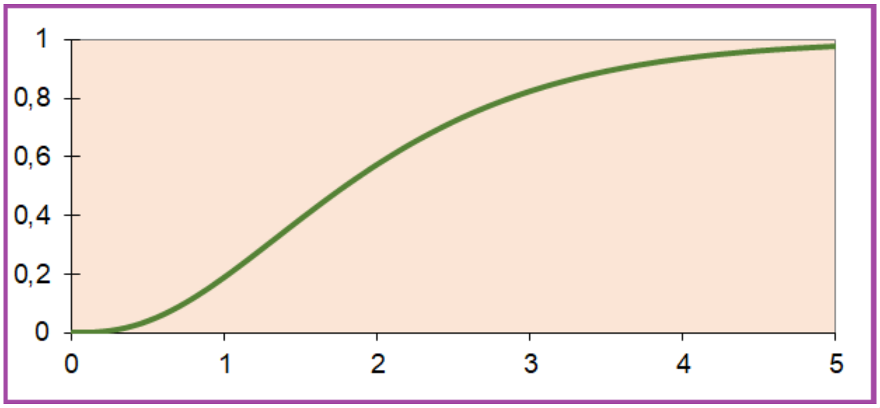
73. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



74. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



75. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



76. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$ *: eloszlásfüggvény*

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

$$\texttt{GAMMA.DIST(}\, x\,;n\,;\tfrac{1}{\lambda}\,;\texttt{FALSE}\,\texttt{)}$$

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt pedig

$$\texttt{GAMMA.DIST(}\, x\,;n\,;\tfrac{1}{\lambda}\,;\texttt{TRUE}\,\texttt{)}$$

A képletben az $\frac{1}{\lambda}$ nem sajtó hiba: A szóbanforgó argumentum tényleg a λ reciproka.

6.2.1. Mennyi idő múlva történik az n -ik baleset?

Képzeljünk el egy nagy várost, ahol a forgalom éjjel-nappal egyforma intenzitással zajlik. Állítjuk, hogy :

1. az az időtartam, amennyit várni kell az **első** baleset bekövetkezésére, exponenciális eloszlást követ,
2. az az időtartam, amennyit várni kell a **második** baleset bekövetkezésére, 2 -od rendű gamma eloszlást követ,
3. az az időtartam, amennyit várni kell a **harmadik** baleset bekövetkezésére, 3 -ad rendű gamma eloszlást követ,

   és így tovább

Az eloszlásfüggvények képletének levezetése: Itt kissé lejjebb az 1. pontban megismételjük azt a gondolatmenetet, melyet az exponenciális eloszlással kapcsolatban már korábban elmondtunk. Ezután a 2. és 3. pontban általánosítjuk ezt a gondolatmenetet.

Minden x időtartammal kapcsolatban tekinthetjük azt a valószínűségi változót, ami azt mutatja, hogy a $[\,0\,;\,x\,]$ időintervallumban hány baleset történik. Világos, hogy adott x mellett ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ. A Poisson eloszlás paramétere nyilván függ a $[\,0\,;\,x\,]$ időintervallum hosszától. Ha a forgalom folyamatosan ugyanolyan körülmények között zajlik, akkor ennek a valószínűségi változónak a várható értéke arányos az x időtartam hosszával, vagyis λx -szel egyenlő, ahol λ az egységnyi hosszúságú időtartam alatti balesetek számának a várható értékét jelöli. Ezért annak a valószínűsége, hogy a $[\,0\,;\,x\,]$ időintervallumban pontosan k baleset történik, egyenlő

$$\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}$$

-szel. Erre a képletre támaszkodnak a következő számítások:

1.

$$\text{P(az \textbf{első} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ baleset történik)} = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Tehát az első balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

vagyis *az első balesetig eltelt időtartam expoenciális eloszlást (első rendű gamma eloszlást) követ* λ *paraméterrel.*

2.

$$\text{P(a \textbf{második} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ vagy } 1 \text{ baleset történik)} =$$

$$= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!} e^{-\lambda x} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}$$

Tehát a második balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}$$

vagyis *a második balesetig eltelt időtartam másod rendű gamma eloszlást követ* λ *paraméterrel.*

3.

$$\text{P(a \textbf{harmadik} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont után történik)} =$$

$$= 1 - \text{P(a } [0,x] \text{ időintervallumban } 0 \text{ vagy } 1 \text{ vagy } 2 \text{ baleset történik)} =$$

$$= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!} e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2!} e^{-\lambda x} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x}$$

Tehát a harmadik balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2} e^{-\lambda x}$$

vagyis *a harmadik balesetig eltelt időtartam harmad rendű gamma eloszlást követ* λ *paraméterrel.*

És így tovább, kiadódik, hogy az n -ik balesetig eltelt időtartam n -ed rendű gamma eloszlást követ λ paraméterrel.

Sűrűségfüggvények: A sűrűségfüggvények képletei deriválással és egyszerűsítéssel könnyen adódnak. Ez a számolás legyen az Olvasó feladata!

Megjegyzések:

- A fenti gondolatmenetben szerepelt az a valószínűségi változó, ami azt mutatta, hogy a $[\,0\,;\,x\,]$ időintervallumban hány baleset történik. Mint már megbeszéltük, a mondott feltételek mellett ennek a valószínűségi változónak a várható értéke λx -szel egyenlő.
- A λ paraméter jelentése: átlagosan hány baleset történik egy egységnyi hosszúságú időintarvallumban.
- Az exponenciális eloszlás tárgyalásánál már említettük, hogy a várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokával. Ha például egy óra alatt a balesetek számának a várható értéke 2.5 , akkor az első balesetre átlagosan $\frac{1}{2.5} = 0.4$ órát kell várni.
- Az n -ed rendű λ paraméterű gamma eloszlás várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokának n -szeresével.

6.2.2. Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van?

n darab izzóm van, melyekkel a világosságot fogom biztosítani a pincénkben addig, amíg az izzó-készletem tart. Az izzókat egymás után használom. Feltesszük, hogy az izzók élettartamai függetlenek és exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. Mindig, amikor az izzó kiég, azonnal becsavarom a következő izzót. Legyen X az az időtartam, amíg a készletemmel a világosságot tudom biztosítani.

Meg lehet mutatni, hogy ez az X valószínűségi változó gamma eloszlást követ n és λ paraméterekkel. A levezetést a feladatok között egy feladatsorozat formájában tálaljuk.

6.3. Normális eloszlások

6.3.1. Standard normális eloszlás

Ismert tény kalkulusból:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Ha valakit izgat, hogy ezt a kissé furcsának tűnő tényt hogyan lehet igazolni, akkor íme a bizonyítás.

Bizonyítás: *(Extra tananyag)* A szóbanforgó integrál négyzetéről látjuk be, hogy 2π -vel egyenlő:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

A második integrálban az x változót y -ra cseréljük:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy =$$

A két integrál szorzatából egy kettős integrált kapunk a síkon:

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dx\, dy \;=\; \iint_{\mathrm{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy \;=$$

Áttérünk polárkoordinátákra, és a kapott integrált szépen kiszámoljuk:

$$= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr \right) d\phi \;=\; \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_{r=0}^{r=\infty} d\phi \;=\; \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 1\, d\phi \;=\; 2\pi$$

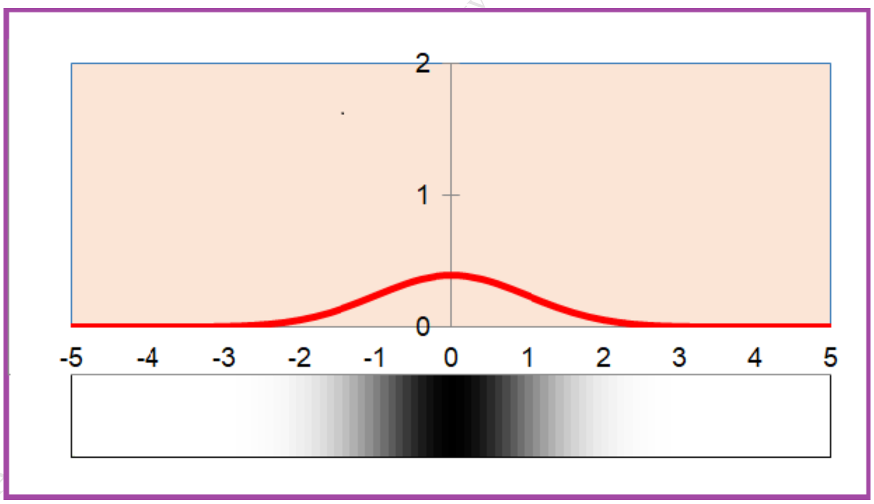
Ennyi volt a bizonyítás. Lám, nem is volt olyan bonyolult.

A *standard normális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

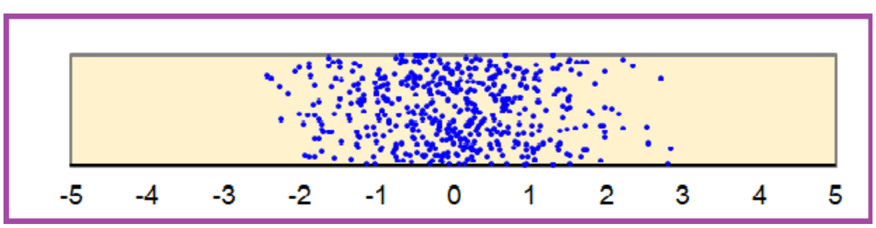
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty \;<\; x \;<\; \infty)$$

Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye:

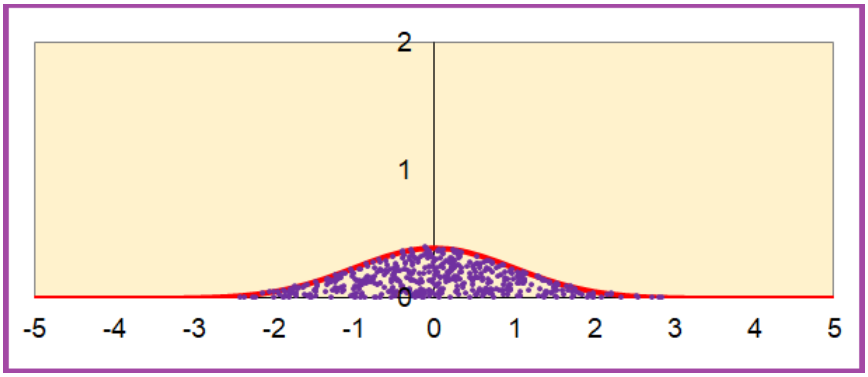
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\;\, dt \qquad (-\infty \;<\; x \;<\; \infty)$$



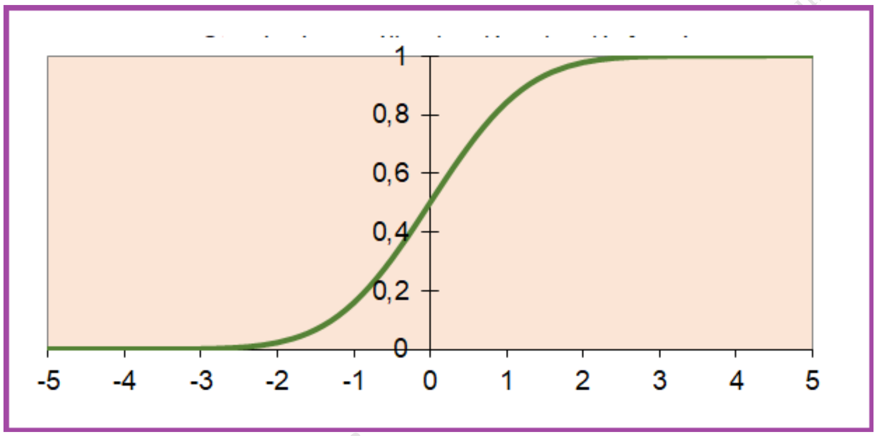
77. ábra. *Standard normális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



78. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



79. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



80. ábra. *Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény*

A megfelelő integrálok kiszámolásával adódik, hogy a standard normális eloszlás **várható értéke** 0 , **szórása** 1 .

Megjegyzés: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét és annak inverzét jól és biztonságosan kell tudni használni! Az eloszlásfüggvény és az inverzfüggvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Íme a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének egy egyszerű táblázata:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500	1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.9987
0.1	0.540	1.1	0.864	2.1	0.982	3.1	0.9990
0.2	0.579	1.2	0.885	2.2	0.986	3.2	0.9993
0.3	0.618	1.3	0.903	2.3	0.989	3.3	0.9995
0.4	0.655	1.4	0.919	2.4	0.992	3.4	0.9997
0.5	0.691	1.5	0.933	2.5	0.994	3.5	0.9998
0.6	0.726	1.6	0.945	2.6	0.995	3.6	0.9998
0.7	0.758	1.7	0.955	2.7	0.997	3.7	0.9999
0.8	0.788	1.8	0.964	2.8	0.997	3.8	0.9999
0.9	0.816	1.9	0.971	2.9	0.998	3.9	1.0000
1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.999	4.0	1.0000

A standard normális eloszlás szimmetriája. A standard normális eloszlás $\phi(x)$ sűrűségfüggvénye páros függvény, szimmetrikus az origóra. Ezért a $(\,-\infty; -x]$ és az $[x; +\infty\,)$ intervallumok valószínűségei egyenlők:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (x \;>\; 0)$$

A Φ függvény táblázatában ezért nincsenek negatív argumentumok. Negatív argumentum esetén a Φ függvény értékei – például – így számolhatók ki:

$$\Phi(-1) \;=\; 1 - \Phi(1) \;=\; 1 - 0.841 \;=\; 0.159$$

$$\Phi(-2) \;=\; 1 - \Phi(2) \;=\; 1 - 0.977 \;=\; 0.033$$

Origóra szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy origóra szimmetrikus $[-r\,;\,r\,]$ intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$\Phi(r) - \Phi(-r) = \Phi(r) - [1 - \Phi(r)] = 2\,\Phi(r) - 1 \qquad (r \;>\; 0)$$

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan origóra szimmetrikus $[-r\,;\,r\,]$ intervallumot, melynek valószínűsége előre adott q érték. Ehhez – adott q mellett a

$$2\,\Phi(r) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani r -re. A megoldás:

$$r = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

Excel-függvények. A következő táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk standard normális eloszlással kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$\varphi(x)$	NORM.S.DIST(x ; FALSE)
Eloszlásfüggvény	$\Phi(x)$	NORM.S.DIST(x ; TRUE)
Eloszlásfüggvény inverze	$\Phi^{-1}(y)$	NORM.S.INV(y)

Bizonyos Excel verziókban

NORM.S.DIST **helyett** NORMSDIST
NORM.S.INV **helyett** NORMSINV

is írható.

6.3.2. Normális eloszlás μ , σ paraméterekkel

Ha μ tetszőleges valós szám és σ tetszőleges pozitív szám, akkor a μ , σ paraméterű **normális eloszlás**t a sűrűségfüggvényével definiáljuk:

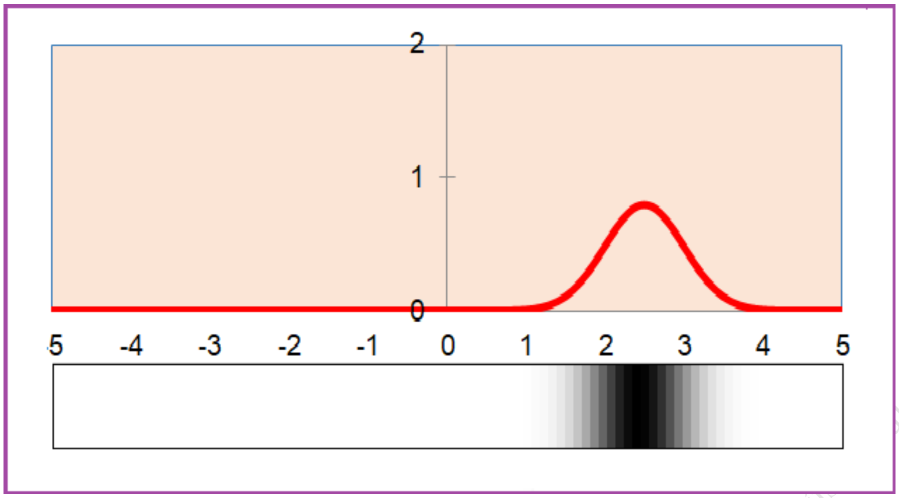
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \qquad (-\infty \ < \ x \ < \ \infty)$$

Az eloszlásfüggvény:

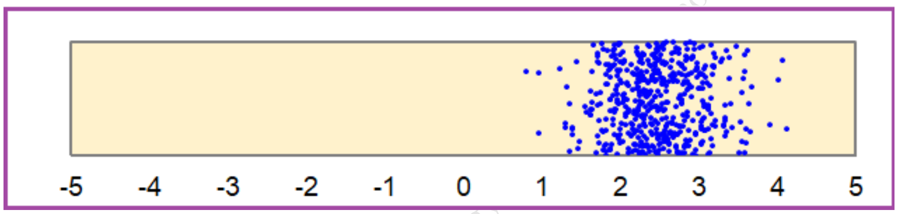
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma} \right)^2} du \qquad (-\infty \ < \ x \ < \ \infty)$$

Ugyanezt az integrált kicsit pongyola, de előnyös módon úgy is írhatjuk, hogy az u integrálási változót is x -szel jelöljük:

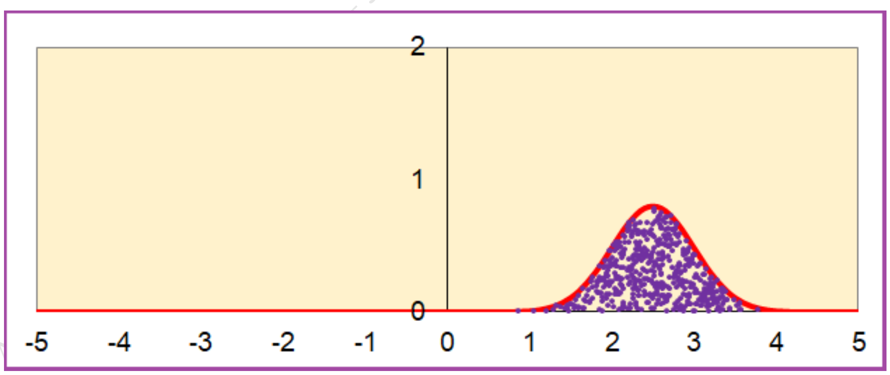
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx \qquad (-\infty \ < \ x \ < \ \infty)$$



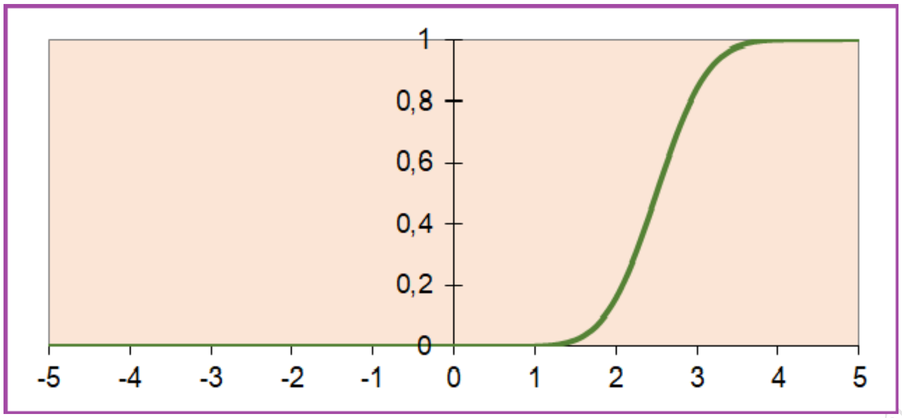
81. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



82. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



83. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



84. ábra. *Normális eloszlás* ($\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5$)*: eloszlásfüggvény*

Az μ , σ paraméterű normális eloszlás **várható értéke** μ , **szórása** pedig σ .

A standard és nem standard normális eloszlások kapcsolata. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, és X -et megszorozzuk pozitív σ számmal, majd hozzáadunk μ -t, akkor μ, σ paraméterű normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk. Megfordítva is igaz: ha az Y valószínűségi változó μ , σ paraméterű normális eloszlást követ, és Y -ból kivonunk μ -t, majd pedig az eredményt elosztjuk σ -val, akkor standard normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk.

Standardizált érték, standardizált. Tetszőleges normális eloszlás eloszlásfüggvényének valamilyen x helyen vett $F(x)$ értéke egyenlő a standard normális eloszlás Φ -vel jelölt eloszlásfüggvényének a

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

helyen vett értékével:

$$F(x) = \Phi(\, z\,)$$

A most bevezetett z értéket az x érték *standardizált érték*ének, *standardizáltjá*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a standardizált z értékből az

$$x = \mu + z \cdot \sigma$$

inverz összefüggéssel megkaphatjuk (visszakaphatjuk) az x értéket.

Tehát az $F(x)$ értékét úgy számoljuk ki, hogy vesszük az x szám z -vel jelölt standardizáltját, és a Φ táblázatában a z értéknél leolvassuk a $\Phi(z)$ -t.

Várható értékre szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy a várható értékre szimmetrikus

$$(\, \mu - r\,;\, \mu + r\,)$$

intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$F(\,\mu + r\,) - F(\,\mu - r\,) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + r - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - r - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(\,\frac{r}{\sigma}\,) - \Phi(\,-\frac{r}{\sigma}\,) =$$

$$= \; 2\,\Phi(\; \frac{r}{\sigma} \;) \; - \; 1$$

Ha r helyett $z \cdot \sigma$ -t írunk, akkor a

$$(\; \mu \; - \; z\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; z\,\sigma \;)$$

intervallum valószínűségét így kapjuk:

$$F(\; \mu \; + \; z\,\sigma \;) - F(\; \mu \; - \; z\,\sigma \;) \; =$$

$$= \; \Phi\left(\; \frac{\mu \; + \; z\,\sigma \; - \; \mu}{\sigma} \; \right) \; - \; \Phi\left(\; \frac{\mu \; - \; z\,\sigma \; - \; \mu}{\sigma} \; \right) \; = \; \Phi(\; z \;) - \Phi(\; -z \;) \; =$$

$$= \; 2\,\Phi(\; z \;) \; - \; 1$$

Az egy-szigma, két-szigma, három-szigma szabályok. Jegyezzük meg, hogy

- $z = 1$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 \; = \; 2\,(0.841) - 1 \; = \; 0.68 \;\; = \; 68\,\%$
- $z = 2$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 \; = \; 2\,(0.977) - 1 \; = \; 0.95 \;\; = \; 95\,\%$
- $z = 3$ esetén $2\,\Phi(z) - 1 \; = \; 2\,(0.999) - 1 \; = \; 0.997 \; = \; 99.7\,\%$

vagyis a

- $(\mu \; - \; 1\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; 1\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.68 \; = \; 68\,\%$
- $(\mu \; - \; 2\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; 2\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.95 \; = \; 95\,\%$
- $(\mu \; - \; 3\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; 3\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.997 \; = \; 99.7\,\%$

Ezekre a szabályokra mint **egy-szigma szabály**, **két-szigma-szabály**, illetve **három-szigma-szabály** szokás hivatkozni. Nyilván 1-től, 2-től és 3-tól különböző z értékre is meg lehetne fogalmazni z **-szigma szabály**-t:

$$(\mu \; - \; z\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; z\,\sigma) \qquad \text{intervallum valószínűsége körülbelül} \qquad 2\,\Phi(z) - 1 \; = \; (\;\; 2\,\Phi(z) - 1 \;\;) \cdot 100\,\%$$

Intervallum keresése. Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan

$$(\; \mu \; - \; r \; ; \; \mu \; + \; r \;)$$

avagy (r helyett $z \cdot \sigma$ -t írva)

$$(\; \mu \; - \; z\,\sigma \; ; \; \mu \; + \; z\,\sigma \;)$$

intervallumot, melynek valószínűsége q . Ehhez a

$$2\,\Phi(z) - 1 \; = \; q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$z \; = \; \Phi^{-1}\left(\; \frac{1+q}{2} \; \right)$$

vagyis

$$r \; = \; \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\; \frac{1+q}{2} \; \right)$$

Lineáris transzformációk. Ha X normális eloszlású valószínűségi változó μ , σ paraméterekkel, a , b konstans számok, és X -et megszorozzuk a -val, majd hozzáadunk b -t:

$$Y \; = \; a\,X \; + \; b$$

akkor normális eloszlást követő Y valószínűségi változóhoz jutunk. Y várható értéke nyilván $a\mu + b$, szórása pedig $|a| \cdot \sigma$.

Normális eloszlás az Excelben: A normális eloszlások eloszlásfüggvényeit és azok inverzeit *jól és biztonságosan kell tudni használni*! Az eloszlásfüggvény és az inverz függvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk normális eloszlásokkal kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$f(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `FALSE`)
Eloszlásfüggvény	$F(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `TRUE`)
Eloszlásfüggvény inverze	$F^{-1}(y)$	`NORM.INV(` y ; μ ; σ)

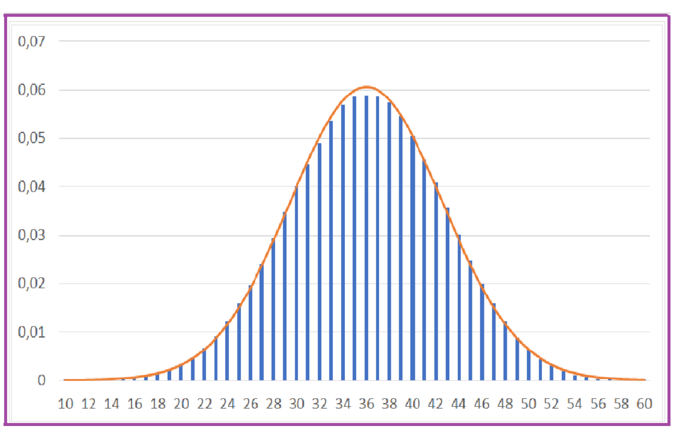
Bizonyos Excel verziókban

`NORM.DIST` helyett `NORMDIST`
`NORM.INV` helyett `NORMINV`

is írható.

6.3.3. Centrális határeloszlás tétel

A könyv első részében, a "Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt" című fejezetben láttuk, hogy a tagok számát növelve az összeg eloszlása egyre jobban közelített egy szép harang alakot. Most felfedjük a titkot, amit ott nem mondtunk meg: ez a harang alak egy normális eloszlás sűrűségfüggvényének a grafikonját jelenti. Az alábbi ábrán a tíz hamis dobókocka összegeként kapott valószínűségi változó eloszlásához hozzáillesztjük a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvényének a grafikonját is:



85. ábra. *Tíz hamis dobókocka összegének eloszlása és a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvénye*

Mivel a centrális határeloszlás tétel egzakt tárgyalása messze meghaladja egy bevezető valószínűségszámítás kurzus kereteit, az egzakt tárgyalástól eltekintünk. Csak pongyola formában fogalmazzuk meg a centrális határeloszlás tétel lényegét:

Ha egy valószínűségi változó *sok, független valószínűségi változó összege*ként áll elő, akkor – általában – ez a valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Fontos lenne azt megvizsgálni, hogy ebben a kijelentésben mit takarnak a *"sok"*, az *"általában"* és a *"közelítőleg"* szavak. Ennek a kérdésnek a részleteit nem tárgyaljuk csak megjegyezzük, hogy a *"sok"* általában nem is kell hogy igazán sok legyen. Például 12 darab (0 és 1 között egyenletes eloszlású) random szám összege már nagyon nagy pontossággal normális eloszlásúnak vehető. 12 darab random szám összegének a várható értékét és szórását könnyű kiszámolni, nemsokára megtanuljuk, hogy hogyan lehet. A várható értékre nyilvánvalóan 6 , a szórásra pedig 1 jön ki. Ezért az

$$X = \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 + \mathrm{RND}_3 + \mathrm{RND}_4 + \mathrm{RND}_5 + \mathrm{RND}_6 +$$
$$+ \mathrm{RND}_7 + \mathrm{RND}_8 + \mathrm{RND}_9 + \mathrm{RND}_{10} + \mathrm{RND}_{11} + \mathrm{RND}_{12} - 6$$

(12 darab random szám összege mínusz 6)

képlettel definiált valószínűségi változó – még kényes, pontos számításokban is! – standard normális eloszlásúnak vehető.

6.3.4. Normális eloszlások alkalmazásai

1. A centrális határeloszlás tétel alapján normális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy *sok független tag összege*ként áll elő.
2. Sokszor csak *kényelmi okokból* használjuk a normális eloszlásokat, mert – különösebb elméleti magyarázat nélkül! – elfogadjuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és a normális eloszlás egyszerű lehetőséget kínál fel arra, hogy a várható érték, a szórás és bennünket érdeklő intervallumok valószínűségeivel numerikus számításokat végezzünk.

   (Ezt a munka stílust – hogy valamit csak kényelmi okokból használunk – nem szabad leszólni! Például az egyenletes eloszlásokat is – különösen többdimenziós problémák esetén – gyakran csak kényelmi okokból részesítjük előnyben a nem egyenletesekkel szemben.)
3. Mint látni fogjuk, *többdimenziós problémák* esetén, amikor vetület és feltételes eloszlásokkal kapcsolatban kell számításokat végeznünk, normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen – integrálások nélkül! – lehet dolgozni.

A normális eloszlás paramétereit vagy elméleti úton lehet kigondolni, vagy kísérleti eredmények átlagával, illetve szórásával kell közelíteni. A paraméterek elméleti kigondolásában segít, ha tájékozottak vagyunk a várható érték, a variancia és a szórás tulajdonságaival.

1. Feladat: Deszkák hossza. Egy faüzemben deszkákat gyártanak, melyek hossza normális eloszlást követ 200 cm várható értékkel és – egyelőre – ismeretlen σ szórással. Tapasztalatból tudjuk, hogy a deszkák 75 %-ának a hossza 195 és 205 cm közé esik. Hány százalékot tesznek ki azok a deszkák, melyek hossza 190 és 210 cm közé esik?

Megoldás: Ha egy véletlenszerűen választott deszka hosszát X -szel jelöljük, akkor a feladat szövege alapján:

$$\mathrm{P}(\ 195 < X < 205\ ) = 0.75$$

Ez azt jelenti, hogy

$$F(205) - F(195) \ = \ 0.75$$

amiből néhány egyszerű lépéssel megkapjuk σ értékét:

$$\Phi\left(\frac{205-200}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{195-200}{\sigma} \right) = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma} \right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sigma} \right) = 0.75$$

$$2\,\Phi\left(\frac{5}{\sigma} \right) - 1 = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma} \right) = \frac{1+0.75}{2} = 0.875$$

$$\frac{5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.875) = 1.15$$

$$\sigma = \frac{5}{1.15} = 4.35$$

Ezek után:

$$\text{P}(\ 190 \ < \ X \ < \ 210\ ) \ = \ F(210) - F(190) =$$

$$= \ \Phi\left(\frac{210-200}{4.35} \right) - \Phi\left(\frac{190-200}{4.35} \right) \ = \ \Phi(2.30) - \Phi(-2.30) \ = \ 2\,\Phi(2.30) - 1 \ = \ 0.98$$

Tehát a deszkák kb. 98 %-ának a hossza esik 190 és 210 cm közé.

2. Feladat: A sarki zöldséges kerekítésekből adódó haszna (vesztesége). A sarki zöldségesnél csak készpénzzel lehet fizetni. A fizetendő összeget fel- vagy lekerekítik úgy, hogy a fizetendő összeg 5 -tel osztható legyen. Felmerül a kérdés: vajon a kerekítésekből a zöldségesnek mennyi extra haszna (vagy vesztesége) jöhet össze – mondjuk – egy nap alatt? A kérdést árnyaltabban kell feltenni, hiszen a napi extra haszon egyrészt függ a vásárlók számától, másrészt nyilván a véletlentől.

Árnyaltabban megfogalmazott kérdés: Mennyi annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – napi 1000 vásárló esetén a bolt kerekítésekből adódó extra haszna 100 forintnál több?

Megoldás: Egy-egy vevő esetében a kerekítésből adódó extra haszon a -2 , -1 , 0 , 1 , 2 (forint) lehetséges értékeket veheti fel. A zöldségesnél ezek az értékek egyforma esélyűeknek vehetők. (Nem így lenne, ha "Óra és ékszer" boltot vizsgálnánk!) A -2 , -1 , 0 , 1 , 2 értékeken vett egyenletes eloszlás várható értéke 0 , szórása pedig $\sqrt{2}$ -vel egyenlő – tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető 0 várható értékkel és $\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2}$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, egyszerűen számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2}} \right) \ = \ 0.013$$

Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{N} \cdot \sqrt{2}} \right)$$

Az extra haszon eloszlásának a 0 -ra vonatkozó szimmetriája miatt ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy bolt vesztesége több, mint x forint.

A következő táblázatban néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.013	0.240	0.412	0.472	0.491	0.497
100 Ft haszon	0.000	0.000	0.013	0.240	0.412	0.472
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.013	0.240
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

A táblázatból látszik az, amit mindennapos tapasztalatunkból is érzünk: a kerekítésekből adódó extra haszon vagy veszteség olyan kis eséllyel lépi túl az irigységre vagy aggodalomra okot adó forint határokat, hogy nyugodt szívvel eltekinthetünk az 1 és 2 forintos érmék használatától.

Köszönet: A kerekítésekből adódó extra haszonra, mint mindennapi életünkben felbukkanó valószínűségi változóra egy kedves (nevét közzé tenni nem akaró) hallgató hívta fel figyelmemet. Ezúton fejezem ki köszönetemet.

3. Feladat: Mi lenne, ha az 5 forintos érmét is kivonnák a forgalomból? Nyilvánvaló, hogy a zöldséges számára kedvező lenne, ha fizetéskor az 5 -re végződő számokat felkerekítenék, a vevő számára pedig az lenne kedvező, ha lekerekítenék. De vajon az ebből a kerekítésből adódó extra nyereségek is az elhanyagolható kategóriába esnek, vagy már nem? Vajon a felkerekítéses esetben mennyi lenne annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 1000 vásárló kapcsán a bolt extra haszna 100 forintnál több? (Ennek az eseménynek a valószínűségére az előző példában 0.013 jött ki.) És hogy is nézne ki ebben az esetben az előbbi táblázat?

Megoldás: A felkerekítéses esetben egy-egy vevőre vonatkoztatva a zöldséges kerekítésből adódó haszna a -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 (forint) lehetséges értékeket venné fel egyforma esélyekkel. Ennek az eloszlásnak a várható értéke 0.5 , a szórása 2.87. Tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető $1000 \cdot 0.5 = 500$ várható értékkel és $\sqrt{1000} \cdot 2.87$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, így számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100 - 500}{\sqrt{1000} \cdot 2.87} \right) = 0.999\,999\,9999\,9996$$

ami egy elég nagy valószínűség érték, ahhoz, hogy a szóbanforgó eseményt gyakorlatilag biztosnak tekintsük! Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x - N \cdot 0.5}{\sqrt{N} \cdot 2.87} \right)$$

Néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megint megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.291	0.918	1.000	1.000	1.000	1.000
100 Ft haszon	0.000	0.041	1.000	1.000	1.000	1.000
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000

A táblázatból is látszik az, amit józan eszünk is súg: felkerekítés esetén a zöldséges extra haszna, és így a vevők extra vesztesége mindenképpen több lenne annál, mint amit etikusan el lehet fogadni! Ha mégis meg kellene szüntetni az 5 forintos érmét, akkor valamit tenni kellene az igazságosság megőrzése érdekében.

6.4. Béta eloszlások várható értéke, szórása *(Extra tananyag)*

Ebben az alfejezetben levezetjük a béta eloszlások várható értékét, majd pedig második momentumát, varianciáját, szórását.

Mivel minden sűrűségfüggvénynek a teljes értelmezési tartományán vett integrálja 1 -gyel egyenlő, ezért fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^1 \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = 1$$

Ha valaki ezt az egyenlőséget közvetlenül integrálással szeretné megkapni akkor ennek sincs különösebb akadálya, hiszen parciális integrálásokkal és kellő türelemmel az $\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx$ integrál értékére kijön:

$$\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \qquad \textit{(nulladik formula)}$$

Érdemes ebben a nulladiknak nevezett formulában k és n helyett $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et, illetve $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t is írni. Hasznos összefüggéseket kapunk:

1. Írjunk k és n helyett először $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et! Ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+1)-1}\,(1-x)^{(n+1)-(k+1)}\,dx = \frac{((k+1)-1)!\,((n+1)-(k+1))!}{(n+1)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} \qquad \textit{(első formula)}$$

2. Írjunk most k és n helyett $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t! Most ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+2)-1}\,(1-x)^{(n+2)-(k+2)}\,dx = \frac{((k+2)-1)!\,((n+2)-(k+2))!}{(n+2)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!} \qquad \textit{(második formula)}$$

A béta eloszlások **várható érték**ének meghatározásánál az *első formula* segít nekünk:

$$\text{várható érték} = \int_0^1 x \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x \cdot x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^{k}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel az első formulát)

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{k}{n+1}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ***ha n random szám közül tekintjük a k -ik legkisebbet, és mindezt N -szer megismételjük, akkor – nagy N esetén – a tekintett számoknak az átlaga körülbelül $\frac{k}{n+1}$ -nel egyenlő.***

Például ha 9 random szám közül az 5 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számok átlaga közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ hez.

A **második momentum** meghatározásánál a *második formula* segít nekünk:

$$\text{második momentum} = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \int_0^1 x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!} =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel a második formulát)

$$= \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

A **variancia** és a **szórás** innen már egyszerűen adódik:

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{ várható érték })^2 = \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 = \frac{k}{n+1}\cdot\left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1}\right)$$

$$\text{szórás} = \sqrt{\text{variancia}} = \sqrt{\frac{k}{n+1} \cdot \left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1} \right)}$$

A szórás képletekből látszódik, hogy ***ha*** k ***és*** n ***úgy tartanak a végtelenhez, hogy a*** $\frac{k}{n}$ ***arányuk egy*** c ***konstanshoz tart, akkor a szórás*** 0 ***-hoz tart.***

A két vastag dőlt betűvel írt tény együttesen azt fejezi ki, hogy *ha nagy* n *esetén* n *random szám közül tekintjük a nagyság szerinti* k *-ik legkisebbet, ahol* k *a* cn *-hez legközelebbi egész szám, és ezt* N *-szer megcsináljuk, akkor nagy* N *esetén a tekintett számoknak nem csak az átlaga lesz közel a* c *értékhez, hanem maguk a tekintett számok is a* c *érték körül fognak tömörülni*.

Például 999 random szám közül az 500 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számoknak nem csak az átlaga, hanem a számok döntő többsége közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ -hez.

7. Közelítések normális eloszlással

7.1. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással

7.1.1. Előkészítés egy példával

Tegyük fel, hogy egy esős vasárnap délután egy 25 tagú társaság minden tagja – a többitől függetlenül – 0.3 valószínűséggel megy moziba. Véletlentől függ, hogy közülük hányan mennek moziba. Jelöljük ezt a valószínűségi változót X -szel. Ennek az X valószínűségi változónak az eloszlása, mint azt jól tudjuk, binomiális eloszlás $n = 25$ és $p = 0.3$ paraméterekkel. Az eloszlást először táblázatosan adjuk meg három tizedesjegy pontossággal:

x	$p(x)$
0	0.000
1	0.001
2	0.007
3	0.024
4	0.057
5	0.103
6	0.147
7	0.171
8	0.165
9	0.134
10	0.092
11	0.054
12	0.027
13	0.011
14	0.004
15	0.001
16	0.000
...	...

A táblázat utolsó sorában álló pontok azt fejezik ki, hogy az eloszlás többi tagja három tizedesjegyre kerekítve nullát ad. Ezért azokat már nem is foglaltuk bele a táblázatba.

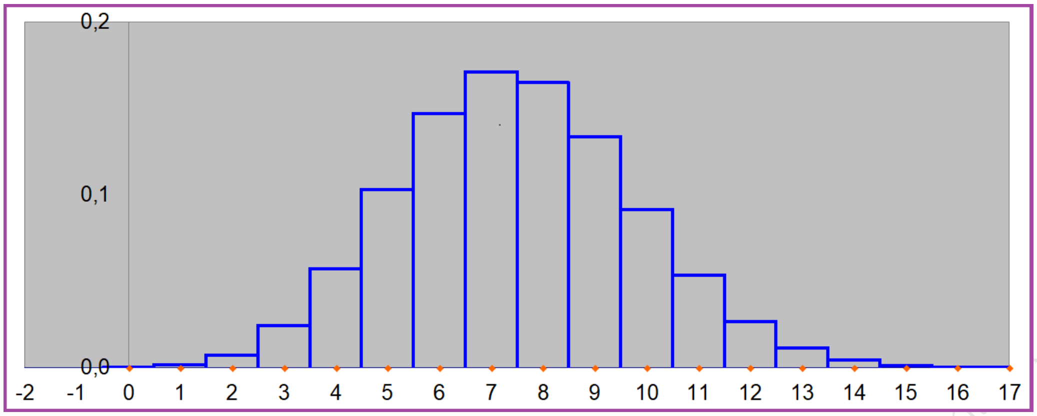
Az eloszlás várható értéke:

$$n \cdot p \;=\; 25 \cdot 0.3 \;=\; 7.5$$

szórása:

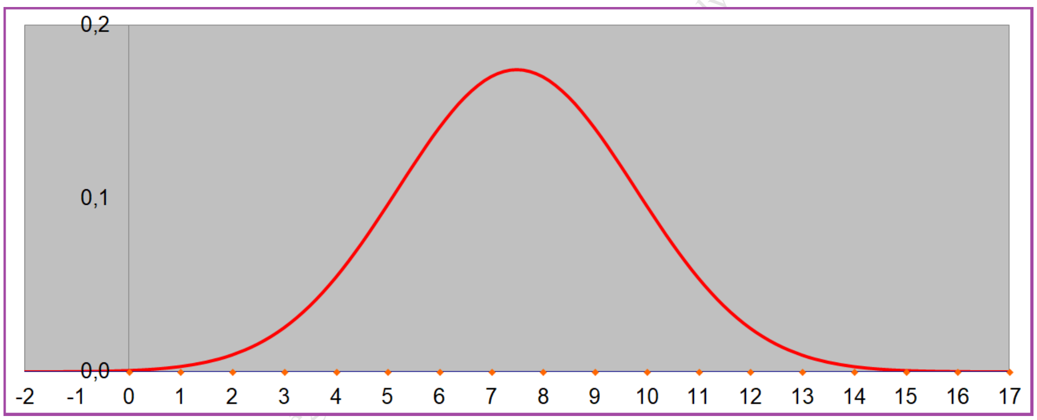
$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \;=\; \sqrt{25 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)} \;=\; 2.291$$

Az alábbi ábrán ezt a diszkrét eloszlást úgy ábrázoljuk, hogy az eloszlásban szereplő valószínűségeket területekkel adjuk meg: minden lehetséges értékhez egy olyan téglalapot rajzoltunk, melynek alapja egységnyi hosszúságú intervallum, és a magassága egyenlő a megfelelő valószínűséggel. Mivel az alap egységnyi hosszúságú, ezért a téglalap területe is egyenlő a megfelelő valószínűséggel.



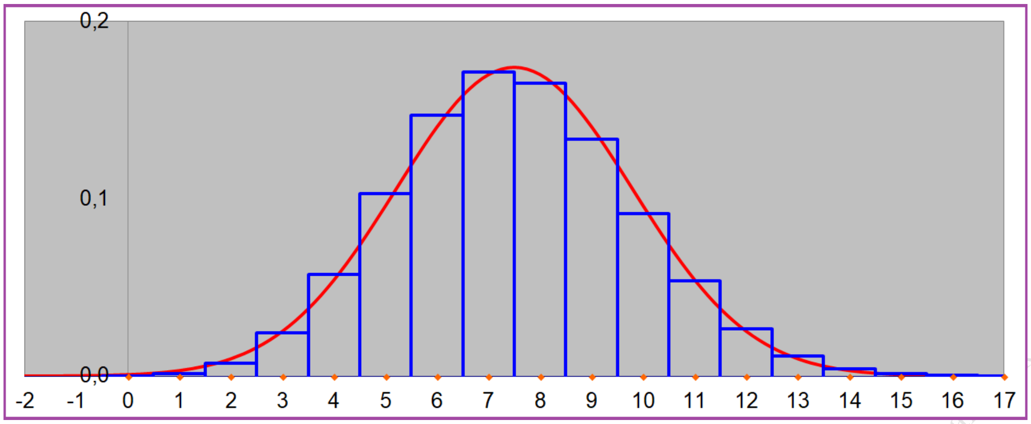
86. ábra. *Binomiális eloszlás*

Tekintsük most azt a normális eloszlást, melynek várható értéke és szórása megegyezik a binomiális eloszlás várható értékével és szórásával. A sűrűségfüggvény grafikonja így fest:



87. ábra. *Normális eloszlás*

Ha a két grafikont egy ábrán ábrázoljuk, szembetűnik, hogy binomiális eloszlás és a normális eloszlás gyönyörűen illeszkednek egymáshoz:

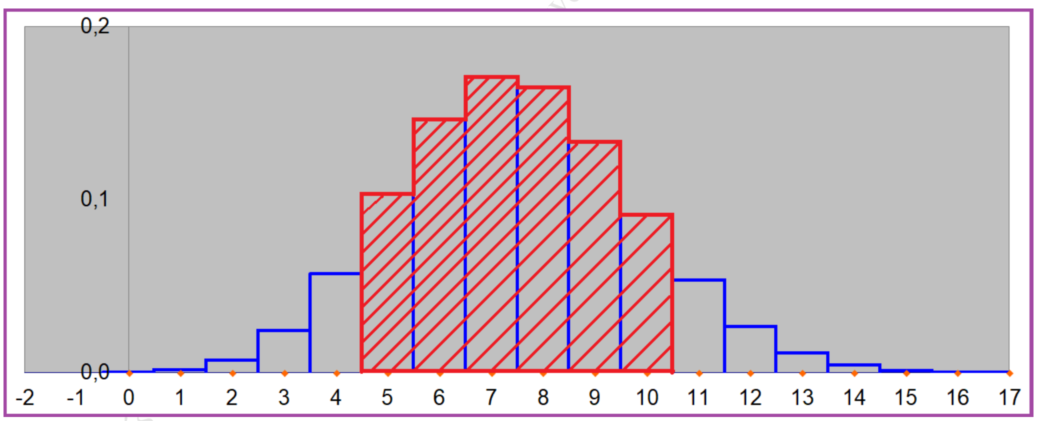


88. ábra. *Binomiális eloszlás és normális eloszlás közös ábrán*

Tekintsük példaként az $[\,5\,,\ 10\,]$ diszkrét intervallumot, azaz az $\{\,5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmazt! A binomiális eloszlás szerint ennek a valószínűsége (három tizedesjegy pontossággal):

$$0.103\ +\ 0.147\ +\ 0.171\ +\ 0.165\ +\ 0.134\ +\ 0.092\ =\ 0.812$$

Fontos, hogy a Kedves Olvasó megnézze, meggondolja, hogy ez a valószínűség mely téglalapok területeinek összegeként adódott. Az alábbi ábra bizonyára segít ebben:



89. ábra. *Valószínűség kiszámítása binomiális eloszlással*

Kézenfekvő, hogy ezt a területet – a binomiális eloszlás és a normális eloszlás közelsége miatt – közelíthetjük azzal a területtel, ami a normális eloszlás grafikonja alatt és a $[\,4.5\,,\ 10.5\,]$ intervallum felett találunk, és az alábbi ábrán szemléltetünk:

90. ábra. *Valószínűség kiszámítása normális eloszlással*

Ez a terület a $[\ 4.5\ ,\ 10.5\ ]$ intervallumnak a normális eloszlás szerinti valószínűségével egyenlő, amit az F eloszlásfüggvényből különbségként kapjuk:

$$F(\ 10.5\ )\ -\ F(\ 4.5\ )\ =$$

$$=\ \Phi\left(\ \frac{10.5-7.5}{2.291}\ \right)\ -\ \Phi\left(\ \frac{4.5-7.5}{2.291}\ \right)\ =$$

$$=\ \Phi(\ 1.318\ )\ -\ \Phi(\ -1.309\ )\ =$$

$$=\ 0.906\ -\ 0.095\ =$$

$$=\ 0.811$$

Figyelem! Nem elírás, hogy a normális eloszlás esetében a $[\ 4.5\ ,\ 10.5]$ intervallumot vettük a $\{\ 5,6,7,8,9,10\}$ halmaz helyett.

Vegyük észre, hogy a binomiális eloszlással kapott 0.812 érték és a binomiális eloszlással kapott 0.811 érték közel van egymáshoz!

7.1.2. A de Moivre – Laplace tétel

A de Moivre – Laplace tétel heurisztikus megfogalmazása. *Egy binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással, ha a binomiális eloszlás n paramétere aránylag nagy, és a p paramétere se a 0 -hoz se az 1 -hez nincs túl közel. A normális eloszlás várható értékét és szórását a binomiális eloszlás várható értékével és szórásával egyezőnek kell felvenni, vagyis a várható érték és a szórás:*

$$np \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{np(1-p)}$$

Ha n értéke legalább 25 , és p értéke 0.1 és 0.9 közé esik, akkor már jó a közelítés.

A gyakoriság közelítő eloszlása. *Ezért, ha egy esemény valószínűsége p , és az eseményre n kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény ν -vel jelölt gyakoriságának eloszlását (ami – mint tudjuk – binomiális eloszlás) normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:*

$$np \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{np(1-p)}$$

A valószínűségek számolásakor az intervallum megválasztására is figyelmet kell fordítani. Az $\{A; A+1, \dots B\}$ halmaz *binomiális eloszlás* szerinti valószínűsége:

$$\sum_{k=A}^{B} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A felírt valószínűségnek a *normális eloszlás*sal való közelítésekor az $[\ A - 0.5\ ;\ B + 0.5\ ]$ intervallumot kell venni:

$$F(\ B\ +\ 0.5\ )\ -\ F(\ A\ -\ 0.5\ )\ =$$

$$= \Phi\left(\frac{(B\ +\ 0.5)\ -\ n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) - \Phi\left(\frac{(A\ -\ 0.5)\ -\ n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right)$$

7.1.3. A de Moivre – Laplace tétel, mint a centrális határeloszlás tétel speciális esete

Amikor – néhány oldallal ezelőtt – elképzeltük, hogy egy esős vasárnap délután egy 25 tagú társaság tagjai közül hányan mennek moziba, akkor csupán ezt az X valószínűségi változót vizsgáltuk. Ez a valószínűségi változó – az ottani feltételek mellett – binomiális eloszlást követ $n = 25$ és $p = 0.3$ paraméterekkel.

Most további valószínűségi változókat vezetünk be:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság legöregebb tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság legöregebb tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság második legöregebb tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság második legöregebb tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$X_{25} = \begin{cases} 1, & \text{ha a társaság } 25 \text{ -ik legöregebb (=legfiatalabb) tagja moziba megy} \\ 0, & \text{ha a társaság } 25 \text{ -ik legöregebb (=legfiatalabb) tagja nem megy moziba} \end{cases}$$

Az X valószínűségi változó nyilván egyenlő ezeknek a független $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_{25},$ indikátor valószínűségi változóknak az összegével. Mivel itt a 25 már "sok"-nak tekintehtő, ezért a centrális határeloszlás tétel miatt X *eloszlása normális eloszlással közelíthető.*

Néhány bekezdéssel feljebb leszögeztük, hogy X *binomiális eloszlást követ*. Most azt kaptuk, hogy X eloszlása normális eloszlással közelíthető. Tehát kiadódik a de Moivre – Laplace tétel állítása: (a megfelelő feltételek teljesülése esetén) ***a binomiális eloszlás normális eloszlással közelíthető***.

7.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

7.2.1. A relatív gyakoriság közelítő eloszlása

Mivel egy esemény relatív gyakorisága nem más mint a ν gyakoriság osztva a kísérletek n számával , a fentieknek nyilvánvaló következménye:

Ha egy esemény valószínűsége p *, és az eseményre* n *kísérletet végzünk, akkor az esemény* $\frac{\nu}{n}$ *relatív gyakorságának az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:*

$$p \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Az alábbi következmény triviális:

A relatív gyakoriság és a valószínűség különbségének közelítő eloszlása. *Az esemény* $\frac{\nu}{n}$ *relatív gyakorisága és az esemény* p *valószínűsége különbségének, vagyis az* $\frac{\nu}{n} - p$ *valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás várható értéke és szórása:*

$$0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

7.2.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény valószínűségét jelöljük p -vel. Tegyük fel, hogy adott egy ε -nal jelölt pontosság érték is. Ha az eseményre több kísérletet végzünk, és tekintjük az esemény ν -vel jelölt gyakoriságát, akkor a $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakoriságnak a p valószínűségtől való $\left| \frac{\nu}{n} - p \right|$ eltérése (a különbségük abszolút értéke) kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát a következő kérdés nagyon is értelmes.

Kérdés: Milyen biztonsággal (valószínűséggel) teljesül az, hogy a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való

$$\left| \frac{\nu}{n} - p \right|$$

eltérése kisebb ε -nál?

Válasz: A fentiek fényében a választ nem nehéz megadni, mert annak a valószínűségét, hogy az $\frac{\nu}{n}$ relatív gyakoriság a p valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{\nu}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \le \frac{\nu}{n} - p \le \varepsilon \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) = 2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - 1$$

Az alábbi táblázatan numerikusan érzékeltetjük, hogy a $p = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$ valószínűségek relatív gyakoriságokkal való közelítésekor a

$$2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - 1$$

kifejezéssel megadott **biztonság (valószínűség) hogyan függ a kívánt ε pontosságtól és a kísérletek n számától**. A bal oldali táblázatban $p = 0.5$, a jobboldali táblázatban $p = 0.3$ avagy $p = 0.7$.

	0.10	**0.05**	**0.01**	**0.10**	**0.05**	**0.01**	**pontosság** (ε)
50	0.84	0.52	0.11	0.88	0.56	0.12	
100	0.95	0.68	0.16	0.97	0.72	0.17	
500	1.00	0.97	0.35	1.00	0.99	0.37	
1 000		1.00	0.47		1.00	0.51	
5 000			0.84			0.88	
10 000			0.95			0.97	
50 000			1.00			1.00	
kísérletek száma (n)							

Vegyük észre a táblázatban, hogy a biztonság értéke $p = 0.3$ és $p = 0.7$ esetén mindenhol nagyobb mint $p = 0.5$ esetén.

7.2.3. Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy . . . ?

Már a könyv elején – a tapasztalatra hivatkozva – leszögeztük, hogy egy eseménnyel kapcsolatban sok kísérlet végezve a relatív gyakoriság közelíti az esemény valószínűségét.

Természetesen felmerül az emberben a kérdés: mennyire sok ez a sok? Pontosabban feltéve a kérdést: adott pontosság és megbízhatóság eléréséhez hány kísérletet kell elvégezni? Ezekre a kérdésekre kapjuk meg a választ az alábbiakban.

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény (általunk nem ismert!) valószínűségét jelöljük p -vel. Legyen még adott egy q (1- hez közeli) valószínűség érték.

Kérdés: Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy q -nál nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság és a p valószínűség eltérése kisebb ε -nál?

A kérdés más formában: Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy adott esemény ismeretlen valószínűségét a relatív gyakoriság legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelítse, vagyis

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{\nu}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) \ \ge\ q$$

Válasz: A kérdéses valószínűséget a fentiekben meghatároztuk a Φ függvény segítségével, ezért az alább egyenlőtlenséget kell most n -re megoldani:

$$2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) - 1 \ \ge\ q$$

Egyszerű átrendezéssel és a Φ függvény inverze segítségével kapjuk, hogy

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \right) \ \geq \ \frac{1+q}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \ \geq \ \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)$$

$$\sqrt{n} \ \geq \ \sqrt{p(1-p)} \ \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)}{\varepsilon}$$

$$n \ \geq \ p(1-p) \ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

Mivel a jobboldalon szereplő $p(1-p)$ tényező legfeljebb $\frac{1}{4}$ lehet, az

$$n \ \geq \ \frac{1}{4} \ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség élesebb a korábbinál.

Tehát *az*

$$n \ \geq \ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{4\,\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén az $\frac{\nu}{n}$ *relatív gyakoriság a* p *valószínűséget* ε *-nál kisebb hibával közelíti legalább* q *biztonság mellett, azaz*

$$\mathrm{P}\left(\ \left| \ \frac{X}{n} - p \ \right| \ \leq \ \varepsilon \ \right) \ \ \geq \ \ q$$

A képletre támaszkodva egy táblázatot készítettünk, mely azt mutaja, hogy a táblázat bal oldalán megadott pontosság (ε) és a táblázat tetején megadott biztonság (q) teljesítéséhez hány kísérlet elvégzése elegendő:

$\varepsilon \setminus q$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.10	68	72	77	83	89	97	106	118	136	166
0.09	84	89	95	102	110	119	131	146	168	205
0.08	106	113	120	129	139	151	165	184	212	260
0.07	139	147	157	168	181	196	216	241	277	339
0.06	188	200	213	228	246	267	293	328	376	461
0.05	271	288	307	329	354	385	422	471	542	664
0.04	423	450	479	513	553	601	660	736	846	1 037
0.03	752	799	852	912	983	1 068	1 172	1 309	1 504	1 844
0.02	1 691	1 797	1 916	2 052	2 211	2 401	2 637	2 944	3 383	4 147
0.01	6 764	7 186	7 663	8 208	8 844	9 604	10 545	11 774	13 530	16 588

Érdemes a táblázat sorait és oszlopait kicsit tanulmányozni.

- Ha akármelyik soron végigmegyünk, észrevehetjük, hogy a biztonság jelentősen nő (közeledik 1 -hez), miközben a kísérletszám aránylag keveset nő: az utolsó elem kb. csak két és félszerese az elsőnek.

- Ha pedig akármelyik oszlopon megyünk végig, láthatjuk, hogy a pontosság javításához (ε csökkentéséhez) a kísérletszám jelentős növelésére van szükség: az utolsó elem kb. százszorosa az elsőnek.

Példa: A krumplis tészta népszerűsége Magyarországon. Ha valaki arra kíváncsi, hogy a magyar felnőttek hányad része szereti a krumplis tésztát, akkor elvileg megkérdezhetné az összes felnőttet, és a válaszok alapján a kérdezett arányt pontosan ki tudná számolni. Ez eléggé költséges és hosszú munka lenne! De ha megelégszünk azzal, hogy az igazi arányt 0.05 pontossággal közelítsük 0.95 biztonság mellett, akkor – a táblázatból látjuk – ehhez elég

$$385 \text{ embert}$$

megkérdezni, és a válaszokból a krumlis tésztát kedvelők relatív gyakoriságát kiszámolni.

7.3. Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással

A centrális határeloszlás tétel szerint, ha elég sok – mondjuk n – független valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg eloszlása jó közelítéssel valamilyen normális eloszlás. Az előszö fejezetben tanultak szerint az összeg várható értéke egyenlő a tagok μ_i várható értékeinek a

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n$$

összegével, szórása pedig a szórások négyzet-összegéből vont négyzetgyökével:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}$$

Ha a tagok egyforma eloszlást követnek, és így várható értékeik és szórásaik egyformák (ezeket a közös értékeket jelölje most μ , illetve σ), akkor az összeg eloszlását közelítő normális eloszlás paraméterei:

$$n \cdot \mu$$

illetve

$$\sqrt{n} \cdot \sigma$$

7.4. Várható érték közelítése átlaggal

7.4.1. Az átlag közelítő eloszlása

Korábban már megbeszéltük, hogy egy X valószínűségi változóra végzett $X_1, X_2, \ldots X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n}$$

átlaga – sok kísérlet esetén – általában közel van a valószínűségi változó várható értékéhez. (Kevés kísérlet esetén ez nem így van, gyakran adódhatnak jelentős eltérések is.) A következő állítás pontosabbá teszi azt, hogy ez a "közelség" mit jelent.

Ha egy X valószínűségi változó várható értéke μ, szórása σ, és a valószínűségi változóra n kísérletet végzünk, melyek eredményeit $X_1, X_2, \cdot, X_n$ jelöli, akkor a kísérleti eredmények

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdot + X_n}{n}$$

átlagának az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei

$$\mu \qquad \text{és} \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Az alábbi következmény triviális:

Az átlag és a várható érték különbségének közelítő eloszlása. *Az $\frac{X_1+X_2+\cdot+X_n}{n}$ átlag és a μ várható érték eltérésének, vagyis az*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdot + X_n}{n} - \mu$$

valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei

$$0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

7.4.2. Várható érték közelítése átlaggal

Tegyük fel, hogy adott egy ε -nal jelölt pontosság érték. Az átlagnak a várható értéktől való eltérése kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát a következő kérdés nagyon is értelmes.

Kérdés: Milyen biztonsággal (valószínűséggel) teljesül az, hogy az átlagnak a várható értéktől való eltérése kisebb ε -nál?

Válasz: Annak a valószínűségét, hogy az átlag a várható értéket ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \right| \le \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \le \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \le \varepsilon \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) - 1$$

7.4.3. Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy . . . ?

Kérdés: Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy egy X valószínűségi változó várható értékét a kísérleti eredményekből adódó átlag egy adott ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

Válasz: Ha az X valószínűségi változó várható értéke μ és szórása σ, továbbá $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jelöli az X -re végzett kísérleti eredményeket, akkor a kísérleti eredmények átlagának a μ -től való eltérése

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

Tudjuk, hogy ennek a különbségnek a várható értéke 0 , szórása pedig $\sigma/\sqrt{n}$. Azt is tudjuk, hogy – elég nagy n esetén ez a különbség is (közelítőleg) normális eloszlásúnak vehető. Ezért annak a valószínűsége, hogy ez a különbség $-\varepsilon$ és ε közé esik, közelítőleg így fejezhető ki a normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \right| \leq \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \leq \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \leq \varepsilon \right) =$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1$$

Ebből adódik: *Ha*

$$2\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1 \geq q$$

azaz

$$\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)$$

vagyis

$$\sqrt{n} \geq \sigma\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]}{\varepsilon}$$

azaz

$$n \geq \sigma^2\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

fennáll, akkor az átlag legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket.

1. Megjegyzés: Ha az X valószínűségi változó normális eloszlást követ, akkor a kísérleti eredmények átlaga normális eloszlást követ. Ebben az esetben nem kell a centrális határeloszlás tételre sem hivatkozni a fenti számolásban, és a kísérletek számának sem kell nagynak lenni, a kísérletek száma akármilyen kicsi is lehet.

2. Megjegyzés: A korábban levezetett

$$n \geq p(1-p)\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képlet speciális esete a most levezetett

$$n \geq \sigma^2\ \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2} \right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

általánosabb képletnek, hiszen egy esemény relatív gyakorisága nem más, mint az eseményre végzett kísérletek kapcsolódó indikátor változók átlaga, és – mint tudjuk – egy p valószínűségű esemény indikátor változójának a szórása $\sqrt{p(1-p)}$, szórásnégyzete (varianciája) $p(1-p)$.

Példa: Hány kilós az "egy kilós" kenyér?
Pontosabban: Mennyi az ÖSSZES "egy kilós" kenyér tömegének az ÁTLAGA?
Senki sem gondolja, hogy minden "egy kilós" kenyér tömege pontosan 1 kg. De vajon az összes ilyen kenyér tömegének mennyi az átlaga?

Ha az összes "egy kilós" kenyeret megmérnénk, pontosan válaszolhatnánk a kérdésre. Ámde az összes kenyeret megmérni gyakorlatilag lehetetlen. Természetes ötletnek tűnik, hogy véletlenszerűen választunk valahány kenyeret, azaz veszünk egy *mintát*, a mintába kerülő kenyereknek a tömegét átlagoljuk, és ezzel az átlaggal közelítjük az összes kenyér tömegének az átlagát.

Mivel a minta véletlentől függ, a mintából számított átlag általában eltér az összes kenyér tömegének az átlagától. Nyilván azt szeretnénk, hogy az eltérés ne legyen túl nagy. Mondjuk, szeretnénk azt elérni, hogy a minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) kisebb legyen.

Ámde erre nincs garancia. A sors hozhatja úgy is, hogy a véletlenszerűen választott minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) nagyobbnak adódik.

Ezért meg kell elégednünk azzal, ha csak annyit garantálunk, hogy a minta átlagának és az összes kenyér átlagos tömegének az eltérése – mondjuk – (legalább) 0.95 valószínűséggel (0.95 biztonsággal) adódik 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) kisebbnek, és – sajnos – (legfeljebb) 0.05 valószínűséggel az eltérés 0.02 kg-nál (2 dkg-nál) nagyobb is lehet.

Kérdés: Ehhez hány kenyeret kell lemérnünk?

Válasz: Ha ismerjük a kenyerek tömegének a σ szórását, vagy a szórásnak egy felső becslését, akkor a tanultak alapján válaszolni tudunk a kérdésre. Tegyük fel, hogy 0.9 kg-nál kisebb vagy 1.1 kg-nál nagyobb tömegű "egy kilós" kenyér sosem bukkan fel a boltokban, ezért a szórás legfeljebb 0.1 kg. A szükséges kísérletek számát megadó

$$\sigma^2 \; \frac{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képletbe behelyettesítve a $q = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $\sigma = 0.1$ értékeket, a képletből 96 -ot kapunk, ami azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy

96 véletlenszerűen választott kenyér

tömegének az átlaga az összes kenyér tömegének az átlagát 0.02 kg -nál kisebb hibával közelíti, legalább 0.95 .

Megjegyzések:

- Ha a pontosságot növeljük, akkor a szükséges kísérletszám nő: ha a 0.02 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük (a 0.95 -ös biztonsági szint megtartása mellett), akkor – a fenti képlet szerint – 385 mérésre van szükség, ami kb. 4 -szer több a 96 -nál.
- Ha biztonságot növeljük, akkor is nő a szükséges kísérletszám, de sokkal kisebb mértékben: ha 0.95 helyett 0.99 biztonsággal akarunk közelíteni (a 0.02 kg-os hibahatár megtartása mellett), akkor ehhez csak 166 mérésre van szükség, ami – arányaikat tekintve – a 96 -nál nem sokkal több.
- Ha a pontosságot is és a biztonságot is növeljük, akkor a szükséges kísérletszám erősebben nő: ha a 0.02 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük, és a 0.95 helyett a 0.99 biztonságra törekszünk, akkor ehhez 663 mérésre van szükség.

Kicsit más formában megismételjük a kapott eredményeket:

- Ha 96 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 2 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 385 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 1 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 166 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.99 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 2 dkg-nál kisebb hibával közelíti.
- Ha 663 véletlenszerűen választott kenyér súlyát megmérjük, akkor legalább 0.99 a valószínűsége annak, hogy a mérési eredmények átlaga az összes kenyér átlagát 1 dkg-nál kisebb hibával közelíti.

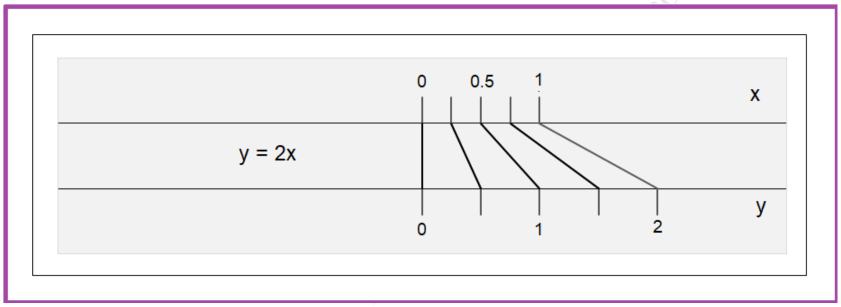
8. Eloszlások transzformációi

Az eloszlások transzformációival kapcsolatos tudnivalókat természetesen matematikai képletek segítségével is le fogjuk írni. Előbb azonban megpróbáljuk azzal segíteni az Olvasót, hogy a dolgok szemléletes jelentését ábrák segítségével előre bemutatjuk.

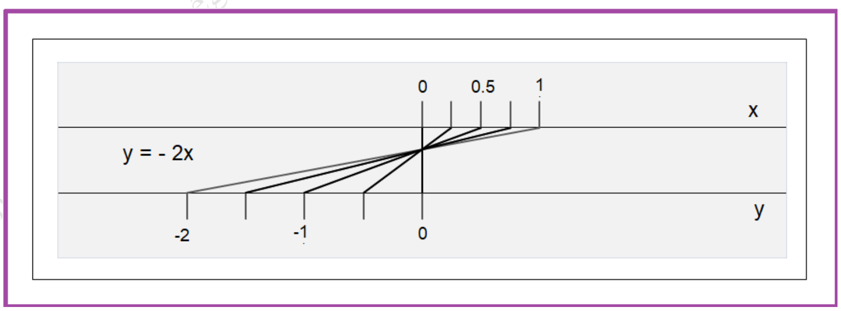
8.1. Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel

8.1.1. Szemléltetés vezérvonalakkal

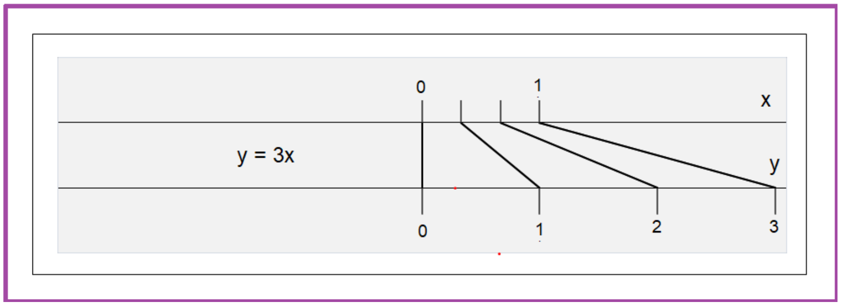
Korábbi tanulmányai során a Kedves Olvasó bizonyára tanulta, hogy egy transzformáció (egy függvény) egy hozzárendelési szabály jelent. A hozzárendelési szabályt mi most összekötő vonalakkal, ú.n. **vezérvonalak**kal ábrázoljuk néhány egyszerű példa segítségével.



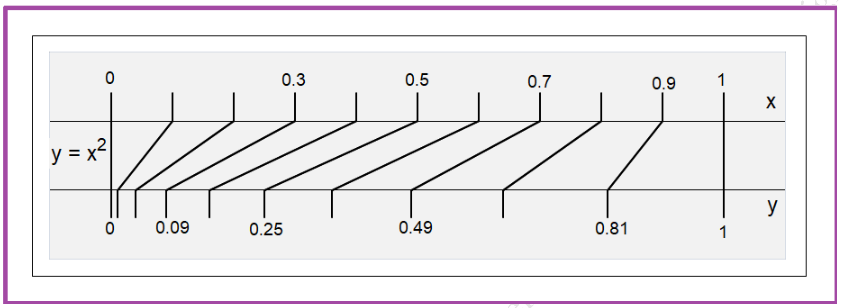
91. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



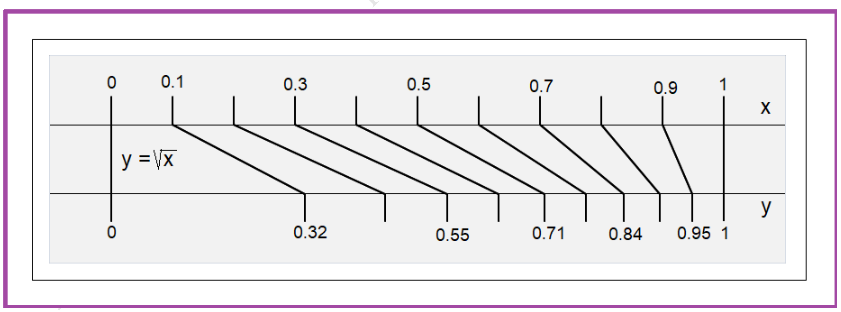
92. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = -2x$ *lineáris függvénnyel*



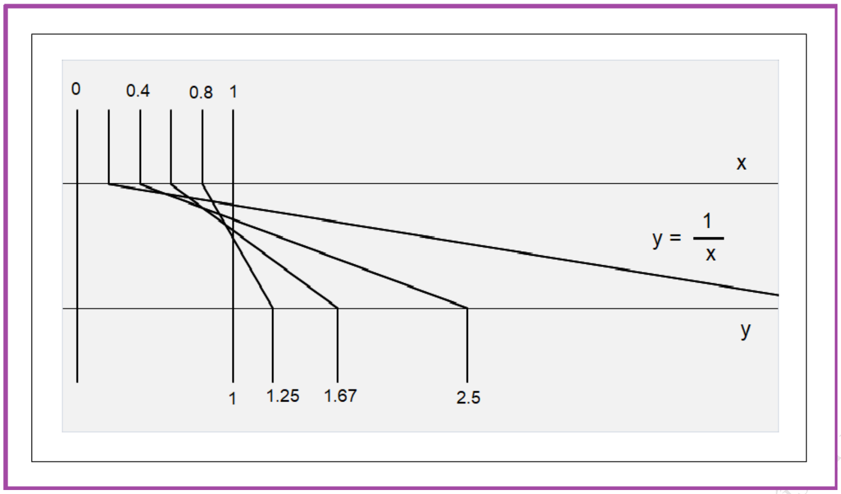
93. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról az* $y = 3x$ *lineáris függvénnyel*



94. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a négyzetre emelés függvénnyel*



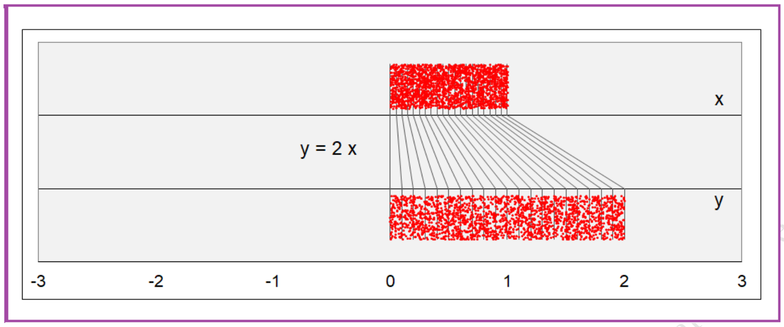
95. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a négyzetgyök függvénnyel*



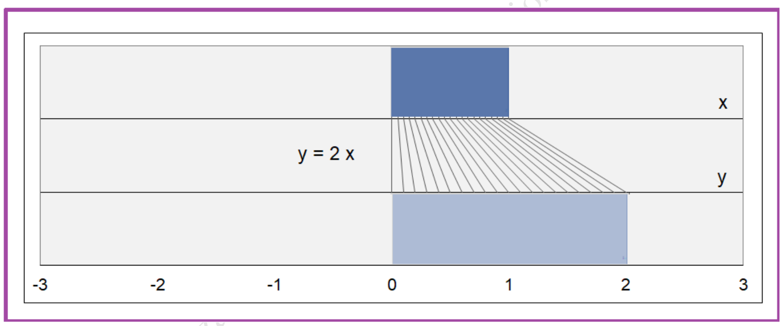
96. ábra. *Transzformáció a* $[0;1]$ *intervallumról a reciprok függvénnyel*

8.1.2. Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi

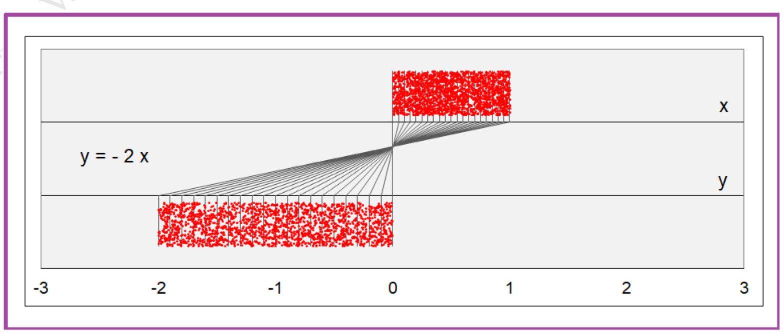
Ha egy lineáris transzformációt mint nyújtást (vagy zsugorítást) képzelünk el, akkor egy ilyen nyújtás során egy egyenletes pontfelhő is és egy egyenletes festék eloszlás is kinyúlik (zsugorodik), és egy ritkább (vagy sűrűbb) egyenletes pontfelhő, illetve egyenletes festék eloszlás lesz belőle. Ilyen ábrákat láthatunk itt:



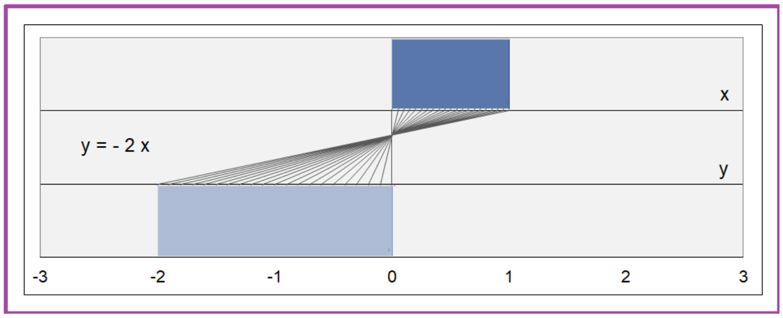
97. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



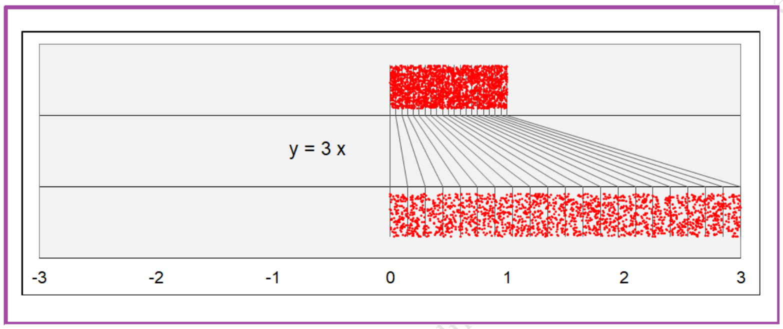
98. ábra. *A* $[0; 1]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y = 2x$ *lineáris függvénnyel*



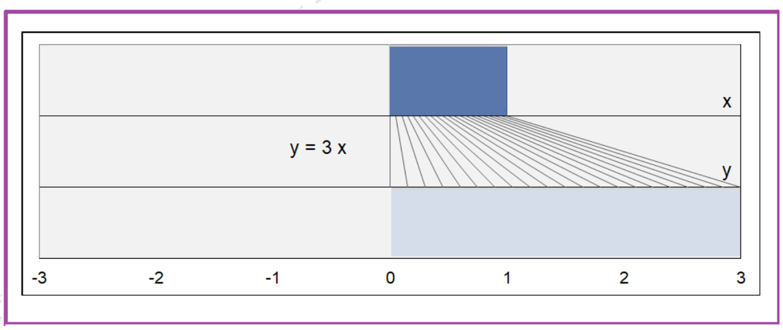
99. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y = -2x$ *lineáris függvénnyel*



100. ábra. *A* $[\,0\,;\,1\,]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y\;=\;-2\,x$ *lineáris függvénnyel*



101. ábra. 0 *és* 1 *között egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja az* $y\;=\;3\,x$ *lineáris függvénnyel*

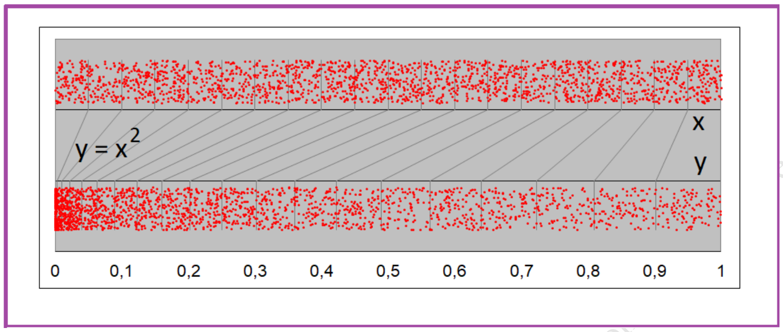


102. ábra. *A* $[\,0\,;\,1\,]$ *intervallumon vett egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja az* $y\;=\;3\,x$ *lineáris függvénnyel*

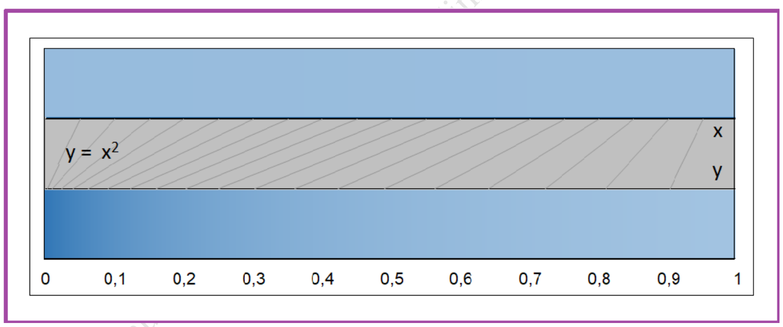
8.1.3. Egyenletes eloszlás monoton transzformációi

Ha egy monoton, nem lineáris transzformációt mint valamilyen deformációt képzelünk el, akkor egy ilyen deformáció során egy egyenletes pontfelhőből is és egy egyenletes festék eloszlásból is és nem egyenletes pontfelhő, illetve nem egyenletes festék eloszlás lesz. Ilyen ábrákat láthatunk itt:

Transzformáció a négyzetre emelés függvénnyel:

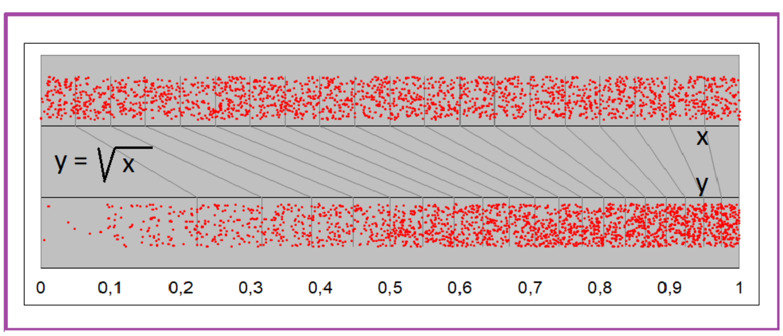


103. ábra. *Egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

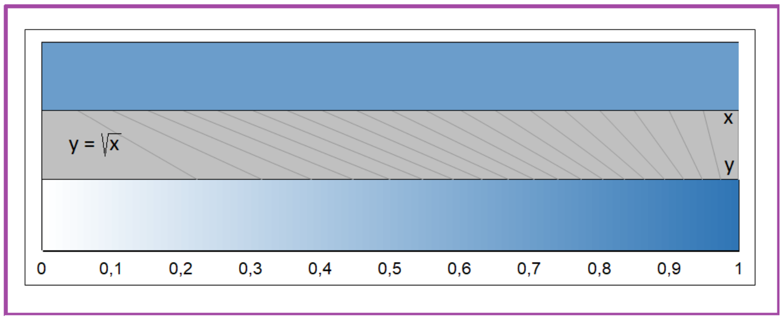


104. ábra. *Egyenletes* ***eloszlás*** *transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

Transzformáció a négyzetgyök függvénnyel:

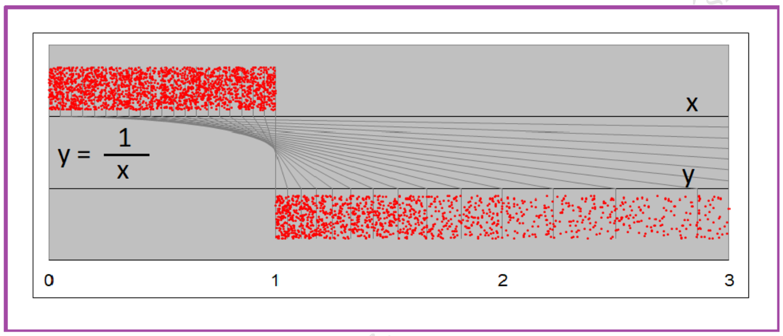


105. ábra. *Egyenletes eloszlású* ***pontfelhő*** *transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

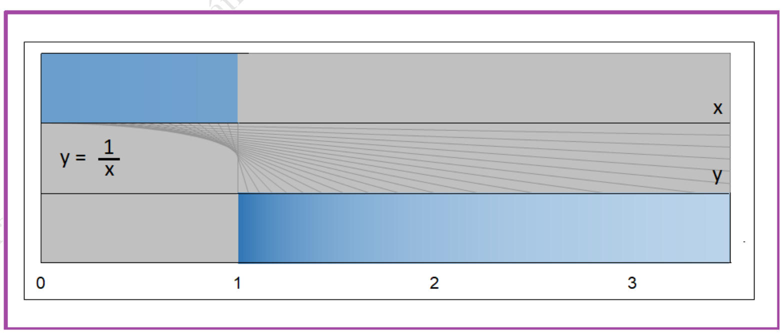


106. ábra. *Egyenletes **eloszlás** transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

Transzformáció a reciprok függvénnyel:



107. ábra. *Egyenletes eloszlású **pontfelhő** transzformációja a reciprok függvénnyel*

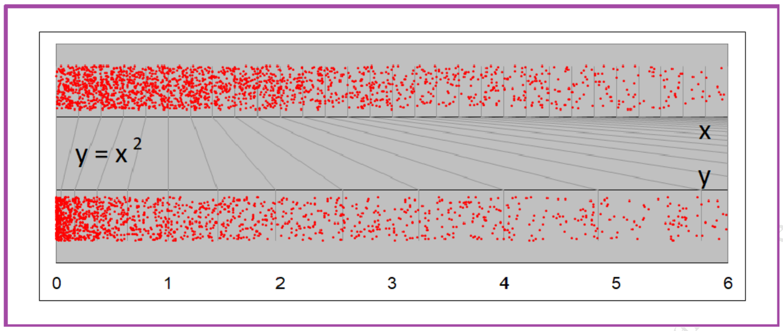


108. ábra. *Egyenletes **eloszlás** transzformációja a reciprok függvénnyel*

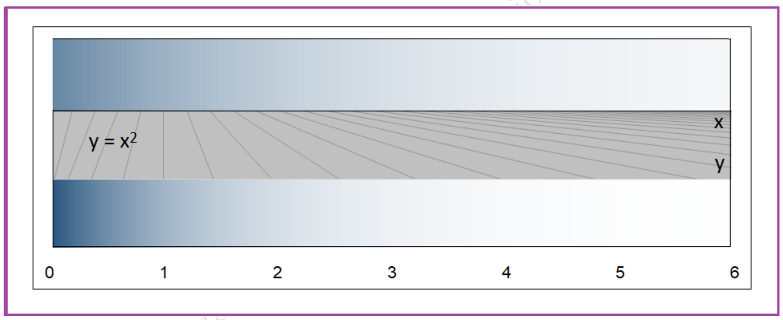
8.1.4. Exponenciális eloszlás transzformációi

Most pedig nem egyenlees eloszlású pontfelhőt, illetve festék eloszlást transzformálunk:

Transzformáció a négyzetre emelés függvénnyel:

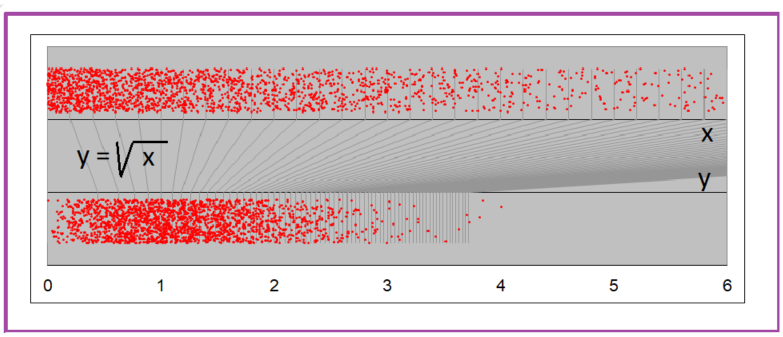


109. ábra. *Exponenciális eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

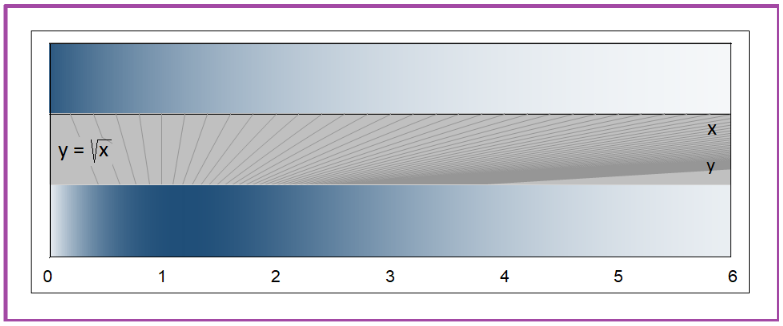


110. ábra. *Exponenciális eloszlás transzformációja a négyzetre emelés függvénnyel*

Transzformáció a négyzetgyök függvénnyel:



111. ábra. *Exponenciális eloszlású pontfelhő transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*



112. ábra. *Exponenciális eloszlás transzformációja a négyzetgyök függvénnyel*

8.2. Lineáris transzformációk leírása képletekkel

Megjegyzés: A 8.1 alfejezetben ábrákkal szemléltettük a eloszlások transzformációit. A 8.2 és 8.3 alfejezetekben a transzformációkat képletekkel írjuk le. A képletek tartalmának ábrákon való megjelenítése ezekben az alfejezetekben az Olvasó feladata.

A hőmérséklet egy adott helyen különböző időpillanatokban más és más lehet, ezért egy adott helyen a hőmérsékletet folytonos valószínűségi változónak tekinthetjük. A hőmérsékletet mérhetjük Celsius fokokban is és Fahrenheit fokokban is. Ami a Celsius skálán x fok, az a Fahrenheit y fok. x és y között a következő lineáris összefüggés áll fenn:

$$y = \frac{9}{5} x + 32$$

Ezért a Celsius fokokban mért X és a Fahrenheit fokokban Y véletlen értékek között is fennáll, hogy

$$Y = \frac{9}{5} X + 32$$

Sok más esetben is előfordul, hogy két valószínűségi változó között egy lineáris kapcsolat áll fenn. Fontos, hogy ilyen esetekre megtaláljuk a kapcsolatot a valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényei között. Erről lesz szó ebben a fejezetben.

Ha a és b konstansokat jelölnek, akkor az $y = a\,x + b\,s$ képlet egy lineáris transzformációt jelent:

- Ha $a > 0$, akkor a számegyenes pontjait először a -szoros nyújtásnak vetjük alá, majd a nyújtással kapott pontokat ezután még b -vel eltoljuk. Ilyenkor a transzformáció egy növekedő függvényt jelent.
- Ha $a < 0$, akkor a nyújtást megelőzi egy tükrözés az origóra, majd ezt követi egy nyújtás $|a|$ -szoros mértékben, és ezután jön az eltolás b -vel. Ilyenkor a transzformáció egy csökkenő függvényt jelent.
- Ha $a = 0$, akkor a számegyenes összes pontja a b pontba képződik. Ilyenkor a lineáris transzformációt **elfajuló**nak nevezzük.

A transzformáció inverzét nyilván az $x = \frac{y-b}{a}$ képlet adja meg.

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Ha az X valószínűségi változó értékeit és egy nem elfajuló (tehát $a \neq 0$) lineáris transzformációnak vetjük alá, azaz X helyett tekintjük az $Y = a\,X + b$ értéket, akkor egy új Y valószínűségi változóhoz jutunk. Fontos tudnunk, hogy milyen kapcsolat áll fenn X és Y eloszlás-, illetve sűrűségfüggvényei között.

A kiindulásul vett X valószínűségi változó "régi" eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$-szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$-szel. A transzformációval kapott $Y = a\,X + b$ valószínűségi változó "új" eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$-nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$-nal.

8.2.1. Növekedő eset $(a > 0)$

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y = a\,x + b \qquad \text{illetve} \qquad x = \frac{y-b}{a}$$

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) = F(x) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) = f(x) \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{illetve} \qquad g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = a\,x + b$, akkor az

$$Y < y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X < x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(X < x)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) = F(x)$$

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) = \left(G(y) \right)' = \left(F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)' = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = f(x) \cdot \frac{1}{a}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is.

Legyenek az

$$[\, x \,;\, x + \Delta x \,] \;, \qquad [\, y \,;\, y + \Delta y \,]$$

intervallumok a transzformációnál egymásnak megfelelő intervallumok, azaz

$$a\,x + b = y \;, \qquad a\,(x + \Delta x) + b = y + \Delta y$$

Vegyük észre, hogy

$$a\,\Delta x \;=\; \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; \frac{1}{a}$$

is igaz. Az transzformáció szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x \;<\; X \;<\; x+\Delta x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y\;) \;=\; \mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x\;)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y+\Delta y\;)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x\;)}{\Delta y} \;\approx$$

Most felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(\; x \;<\; X \;<\; x+\Delta x\;) \;\approx\; f(x)\cdot\Delta x$$

ezt kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{f(x)\cdot\Delta x}{\Delta y} \;=\; f(x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{a}$$

8.2.2. Csökkenő eset $(\; a \;<\; 0\;)$

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y \;=\; a\,x \;+\; b$, illetve $x \;=\; \frac{y-b}{a}$.

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\,(\,x\,) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) \;=\; 1 \;-\; F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; -\,f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

illetve

$$g(y) \;=\; -\,f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = \;a\,x \;+\; b$, akkor az

$$Y \;<\; y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X \;>\; x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\; Y \;<\; y\;) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;>\; x\;)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\,(\,x\,)$$

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) \;=\; 1 \;-\; F\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) \;=\; G'(y) \;=\; \left(\; 1 \;-\; F\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right)\right)' \;=\; -\, f\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right) \cdot \frac{1}{a} \;=\; f\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Mivel $\frac{y-a}{b} \;= x$, az is kiadódik, hogy:

$$g(y) \;=\; -\, f\,(\,x\,)\, \cdot\, \frac{1}{a} \;=\; f\,(\,x\,)\, \cdot\, \frac{1}{|a|}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. A levezetésnél oda kell figyelni arra tényre, hogy most a negatív. Legyenek az x és y pontok egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y \;=\; a\, x \;+\; b$$

Mivel a negatív, az $y \;+\; \Delta y$ pontnak megfelelő pont az x pont baloldalán van, jelöljük $x \;-\; \Delta x$ -szel:

$$y \;+\; \Delta y \;=\; a\,(\; x \;-\; \Delta x) \;+\; b$$

Tehát most az

$$[\; x \;-\; \Delta x \;;\; x \;] \;, \qquad [\; y \;;\; y \;+\; \Delta y \;]$$

intervallumok felelnek meg a transzformációnál egymásnak. Vegyük észre, hogy most

$$-\, a\, \Delta x \;=\; \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; -\, \frac{1}{a}$$

A transzformáció szigorúan monoton csökkedő tulajdonsága miatt az

$$y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y \;) \;=\; \mathrm{P}(\; x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x \;)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(\; y \;<\; Y \;<\; y + \Delta y \;)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{P}(\; x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x \;)}{\Delta y}$$

Most felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(\; x \;-\; \Delta x \;<\; X \;<\; x \;) \;\approx\; f(x) \cdot \Delta x$$

ezt kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta y} \;=\; f(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; f\,(\,x\,)\, \cdot \left(\; -\frac{1}{a} \;\right) \;=\; f\,(\,x\,)\, \cdot \left(\; \frac{1}{|a|} \;\right) \;=$$

$$=\; -\, f\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right) \cdot \frac{1}{a} \;=\; f\left(\; \frac{y-b}{a} \;\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

8.2.3. A két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen a

$$g(y) \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

$$g(y) \;=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{|a|}$$

képletek pozitív és negatív a esetén is helyesek.

8.3. Monoton transzformációk leírása képletekkel

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Az eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$ -szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel. Legyen

$$y \;=\; t(x)$$

egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény, melynek

$$x \;=\; t^{-1}(y)$$

-nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha az X valószínűségi változót behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet logikus $t(\mathrm{X})$ -szel jelölni. Az Y, vagyis $t(\mathrm{X})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

8.3.1. Növekedő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y \;=\; t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) \;=\; F\,(\,x\,) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) \;=\; F\left(\,t^{-1}(y)\,\right)$$

Tehát *az új eloszlásfüggvény nem más, mint a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény*.

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{dx}{dy} \qquad \text{azaz} \qquad g(y) \;=\; f\left(\,t^{-1}(y)\,\right)\;\cdot\;\left(\,t^{-1}(y)\,\right)'$$

Tehát a *z új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény megszorozva a transzformációs függvény inverzének a deriváltjával*.

Levezetés. Az $y \;=\; t(x)$ függvény szigorú monoton növekedő mivolta miatt az $Y \;<\; y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X \;<\; x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(\;Y \;<\; y\;) \;=\; \mathrm{P}(\;\;t(X)\;<\;y\;\;)$. Ezt felhasználva:

$$G(y) \;=\; \mathrm{P}(\;Y \;<\; y\;) \;=\; \mathrm{P}(\;\;X \;<\; x\;\;) \;=\; F(\;\;x\;\;) \;=\; F\left(\;t^{-1}(y)\;\right)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) \;=\; f\left(\,t^{-1}(y)\,\right)\cdot\left(\;t^{-1}(y)\;\right)' \;=\; f\,(\,x\,)\;\cdot\;\frac{dx}{dy}$$

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x = t^{-1}(y)$$

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(\, Y \in J \,) = \mathrm{P}(\, X \in I \,)$$

másrészt

$$\frac{I \text{ hossza}}{J \text{ hossza}} \approx \frac{dx}{dy} = \left(\, t^{-1}(y) \,\right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(\, X \in I \,) \approx f(x) \cdot I$ hossza, azt kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(\, Y \in J \,)}{J \text{ hossza}} = \frac{\mathrm{P}(\, X \in I \,)}{J \text{ hossza}} \approx \frac{f(x) \cdot I \text{ hossza}}{J \text{ hossza}} = f(x) \cdot \frac{I \text{ hossza}}{J \text{ hossza}} \approx$$

$$\approx f(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f\left(\, t^{-1}(y) \,\right) \cdot \left(\, t^{-1}(y) \,\right)'$$

8.3.2. Csökkenő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - F(\, x \,) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) = 1 - F\left(\, t^{-1}(y) \,\right)$$

Tehát *az új eloszlásfüggvény úgy áll elő a régi segítségével, hogy a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvényt* 1 *-ből kivonjuk.*

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) = f(\, x \,) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| \qquad \text{azaz} \qquad g(y) = f\left(\, t^{-1}(y) \,\right) \cdot \left| \left(\, t^{-1}(y) \,\right)' \right|$$

Tehát *az új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett összetett függvény megszorozva a transzformációs függvény inverze a deriváltjának az abszolút értékével.*

Levezetés. Az $y = t(x)$ függvény szigorú monoton csökkenő mivolta miatt az $Y < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X > x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(\, Y < y \,) = \mathrm{P}(\, X > x \,)$. Ezt felhasználva:

$$G(y) = \mathrm{P}(\, Y < y \,) = \mathrm{P}(\, X > x \,) = 1 - \mathrm{P}(\, X < x \,) = 1 - F(\, x \,) = 1 - F\left(\, t^{-1}(y) \,\right)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) = -f\left(\, t^{-1}(y) \,\right) \cdot \left(\, t^{-1}(y) \,\right)' = f\left(\, t^{-1}(y) \,\right) \cdot \left| \left(\, t^{-1}(y) \,\right)' \right| = f(\, x \,) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x = t^{-1}(y)$$

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(\ Y \in J\ )\ =\ \mathrm{P}(\ X \in I\ )$$

másrészt

$$\frac{dx}{dy}\ =\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\ \approx\ -\frac{I\ hossza}{J\ hossza}$$

A derivált azért negatív, mert a $t^{-1}(y)$ függvény monoton csökkenő. Tehát

$$\frac{I\ hossza}{J\ hossza}\ \approx\ -\frac{dx}{dy}\ =\ -\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(\ X \in I\ )\ \approx\ f(x) \cdot I\ hossza,$ azt kapjuk, hogy

$$g(y)\ \approx\ \frac{\mathrm{P}(\ Y \in J\ )}{J\ hossza}\ =\ \frac{\mathrm{P}(\ X \in I\ )}{J\ hossza}\ \approx\ \frac{f(x) \cdot I\ hossza}{J\ hossza}\ =\ f(x) \cdot \frac{I\ hossza}{J\ hossza}\ \approx$$

$$\approx\ f(x) \cdot \left(-\frac{dx}{dy}\right) = f\left(\ t^{-1}(y)\ \right) \cdot \left(-\ \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right)\ =$$

$$=\ f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|\ =\ f\left(\ t^{-1}(y)\ \right) \cdot \left|\left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right|$$

Az abszolút érték jel azért tudta felváltani a mínusz jelet, mert a derivált értéke negatív.

8.3.3. A két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen az abszolút értékjellel írt

$$g(y)\ =\ f\,(\ x\ )\ \cdot\ \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$g(y)\ =\ f\left(\ t^{-1}(y)\right)\ \cdot\ \left|\left(\ t^{-1}(y)\ \right)'\right|$$

képletek növekedő és csökkenő esetben is érvényesek.

8.4. Lognormális eloszlások

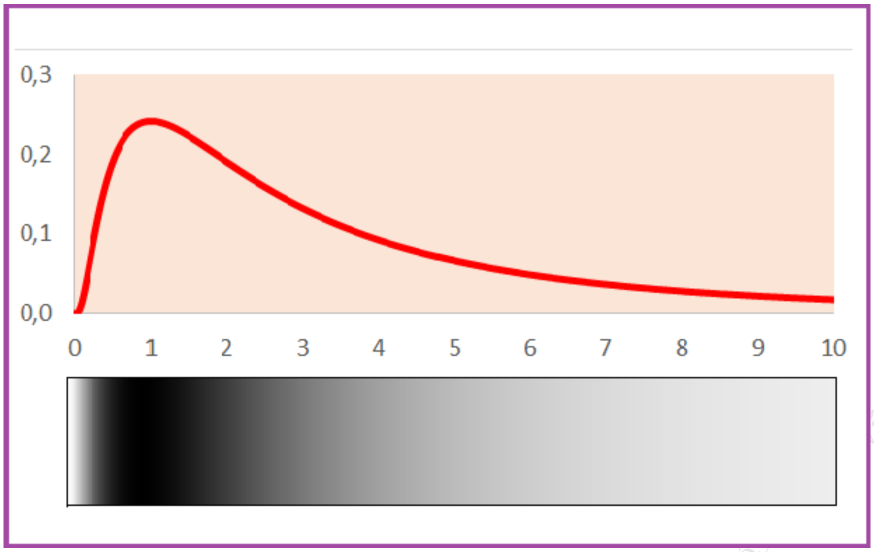
Ha a (μ, σ) paraméterű normális eloszlást az $y\ =\ \mathrm{e}^x$ transzformációnak vetjük alá, akkor a (μ, σ) paraméterű **lognormális eloszlás**hoz jutunk.

Eloszlásfüggvény:

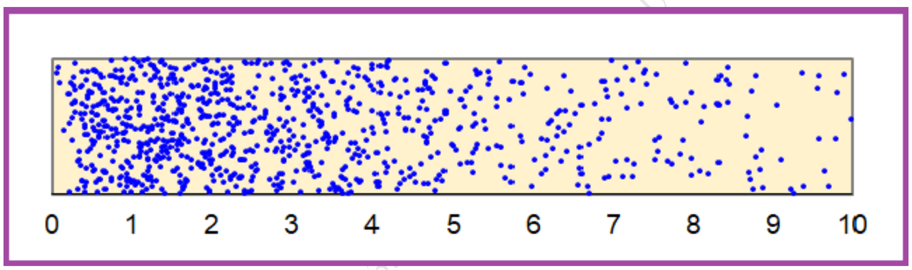
$$F(x)\ =\ \Phi\left(\ \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\ \right)$$

Sűrűségfüggvény:

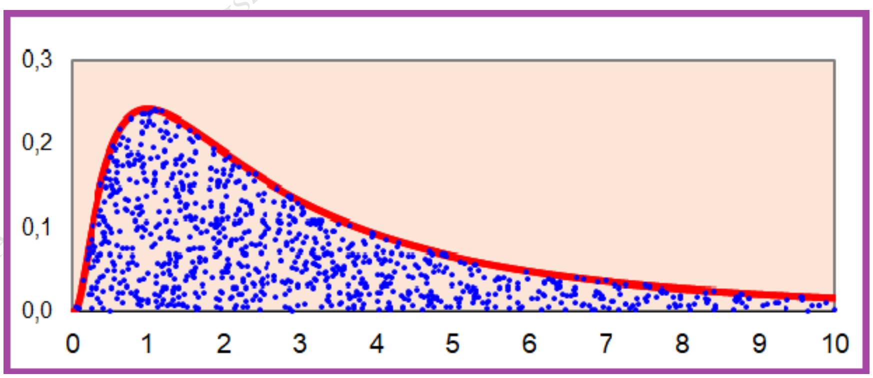
$$f(x)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\ \sigma x}\ \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\ \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\ \right)^2}$$



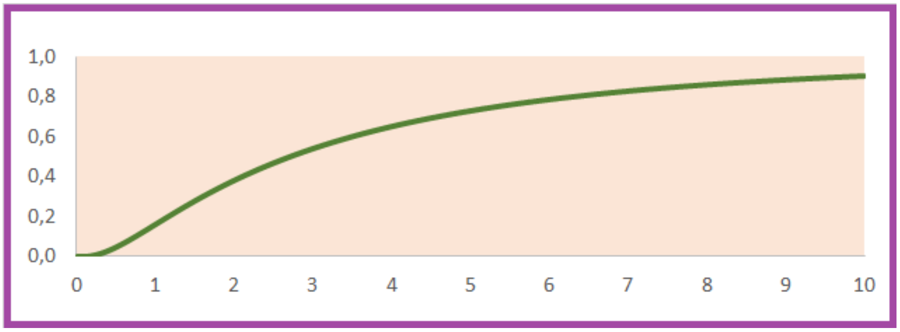
113. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1$; $\sigma = 1$)*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



114. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1$; $\sigma = 1$)*: pontfelhő* 1000 *kísérletből*



115. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1$; $\sigma = 1$)*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



116. ábra. *Lognormális eloszlás* ($\mu = 1;\ \sigma = 1$)*: eloszlásfüggvény*

Összefüggések a paraméterek, a várható érték és a szórás között *(Extra tananyag):* Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

integrál kiszámolásával igazolható, hogy a (μ, σ) paraméterű lognormális eloszlást várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ X\ ) \ = \ \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ \mathrm{e}^{x}\ )^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

integrál kiszámolásával meghatározhatjuk a második momentumot:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) \ = \ \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$$

Ennek segítségével megkapjuk a varianciát:

$$\mathrm{VAR}(\ X\ ) \ = \ \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} \ - \ \left(\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\right)^2 \ = \ \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} \ - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \ = \ \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

Gyökvonással a szórás is adódik:

$$\mathrm{SD}(\ X\ ) \ = \ \sqrt{\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\ \right)}$$

Ha a várható értékre és a szórásra kapott formulákra most úgy tekintünk, mint μ -re és σ -ra vonatkozó egyenletrendszerre, akkor megkapjuk μ -t és σ -t a várható értékkel és a szórással kifejezve:

$$\mu \ = \ \ln\left(\ \mathrm{E}(\ X\ )\ \right) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{\mathrm{SD}(\ X\ )}{\mathrm{E}(\ X\ )}\right)^2\right)$$

$$\sigma \ = \ \ln\left(1 + \left(\frac{\mathrm{SD}(\ X\ )}{\mathrm{E}(\ X\ )}\right)^2\right)$$

Ezeket a formulákat olyankor használhatjuk, ha egy X valószínűségi változóról tudjuk, hogy lognormális eloszlást követ, és az eloszlás paraméátereire van szükségünk. Ha valamilyen forrásból tudjuk a várható értéket és a szórást, akkor e formulák megadják a paramétereket.

Lognormális eloszlások alkalmazása:

Ha egy normális eloszlású valószínűségi változót az exponenciális függvénybe helyettesítünk, akkor lognormális eloszlású valószínűségi változóhoz jutunk. Másképpen mondva: *egy valószínűségi változó akkor követ lognormális eloszlást, ha a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlást követ*.

Emlékeztetünk rá, hogy

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, 0 *-hoz közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó összegeként-ként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel, illetve
2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó össegeként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Mivel a logaritmus függvény szorzatot összegbe visz, az exponenciális függvény pedig összeget szorzatba visz, világos, hogy

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, 1 *-hez közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel; illetve
2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Tehát lognormális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy sok 1 -hez közeli értékeket felvevő vagy kis szórású, független tényező szorzataként áll elő.

Az Excelben a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényét az

LOGNORM.DIST(x ; μ ; σ ; FALSE)

képlet adja, az eloszlásfüggvényt pedig

LOGNORM.DIST(x ; μ ; σ ; TRUE)

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)*

Az alábbi feladat kissé erőltetett, de – amiról szól – könnyen elképzelhető és elmagyarázható, és – szimulációval – a kísérlet könnyen meg is valósítható.

1. Feladat: Valaki – játékos vidám jó kedvében – feldob egy dobókockát. Ezután

- ha hatos jön ki, akkor generál egy valós 0 és 7 közötti, egyenletes eloszlást követő véletlen számot a `7*RAND()`, magyarul `7*VÉL()` Excel utasítással,
- ha nem hatos jön ki, akkor a `RANDBETWEEN(1;5)`, magyarul `VÉLKÖZÖTT(1;5)` Excel utasítással generál egy egész számot 1 és 5 között egyenletes eloszlás szerint.

Legyen X a generált szám. Milyen eloszlást követ X ?

Megoldás: Nem szorul különösebb magyarázatra, hogy X eloszlása egy folytonos és egy diszkrét eloszlásból keveréssel adódik:

- a folytonos eloszlás az egyenletes eloszlás a $(0;7)$ intervallumon, melynél a sűrűségfüggvény értéke $1/7$ -del egyenlő a $(0;7)$ intervallumban,
- a diszkrét eloszlás az egyenletes eloszlás az $1,2,3,4,5$ számok halmazán, melynél mind az öt pontban a súlyfüggvény értéke $1/5$ -del egyenlő.

A keverésnél

- a folytonos rész $1/6$ súlyt kap, hiszen a hatos $1/6$ valószínűséggel jön ki,
- a diszkrét rész $5/6$ súlyt kap, hiszen a nem-hatos valószínűsége $5/6$.

Ha az eloszlásat szétkent egységnyi festékkel szemléltetjük, akkor ez az eloszlás így képzelhető el:

- először $1/6$ festékmennyiséget szétkenünk a $(0;7)$ intervallumon egyenletesen, vagyis úgy, hogy a festéksűrűség $(0;7)$ intervallumban mindenhol $1/6 \cdot 1/7 \;=\; 1/42$ legyen:

$$f(x) \;=\; 1/42 \qquad (0 \;<\; x \;<\; 7)$$

- ezek után az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére ráhelyezzük a maradék $5/6$ festékmennyiség $1/5$ részét, vagyis az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére $5/6 \cdot 1/5 \;=\; 1/6$ nagyságú tömegpont kerül

$$p(x) \;=\; 1/6 \qquad (x = 1,2,3,4,5)$$

Hogy néz ki ennek az eloszlásnak az eloszlásfüggvénye? Legyen az Olvasó feladata a grafikon gondos elkészítése!

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)*

Ez a fejezet egyáltalán nem része a tananyagnak. Amit itt lehet megérteni, annak nincs haszna a mindennapi gyakorlatban. Csak azok olvassák el, akik a matematika alkalmazhatósága mellett értékelik a matematika logikai tisztaságát is.

Tekintsük a balról zárt, jobbról nyitott $[0;1)$ intervallumot.

10.1. Trükkös eltolás

Az intervallum pontjaival kapcsolatban bevezetünk egy trükkös eltolást. Ha x egy eleme a $[0;1)$ intervallumnak, és r egy 1 -nél kisebb pozitív szám, akkor $x+r$ -t joggal nevezhetjük az x pont r -rel való eltoljának. $x+r$ nyilván kisebb 2 -nél.

Két eset lehet. Az egyik az, hogy $x+r$ még bele esik a $[0;1)$ intervallumba, a másik, hogy $x+r$ nagyobb 1 -nél. Ez utóbbi esetben viszont $x+r-1$ eleme a $[0;1)$ intervallumnak. Az $x+r-1$ érték azt mutatja, hogy $x+r$ mennyivel nagyobb 1 -nél. Az első esetben az $x+r$ számot, a második esetben az $x+r-1$ számot az x szám r -rel való **trükkös eltolt**jának nevezzük.

10.2. Barátok és osztályok

Azt mondjuk, hogy két 0 és 1 közötti szám **barát**, ha az egyik a másiknak valamilyen racionális számmal való trükkös eltoltja. A barátság relációját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy két szám egymás barátja, ha egymástól való távolságauk racionális szám. Nyilvánvaló, hogy a jóbarátság ekvivalencia reláció, ami a $[0;1)$ intervallumot diszjunkt **osztályok**ra bontja. Minden osztályban megszámlálhatóan végtelen sok elem van. Az osztályok száma koninuum.

10.3. Főnökök

Képzeljük el, hogy minden osztályban választanek egy jól definiált **főnök**öt. Azzal, hogy ezt hogyan teszik, mi nem foglalkozunk, legyen ez az osztály belső titka. Ezáltal kontinuum sok főnök lesz. A főnökök halmazát jelöljük F -fel.

Legyen r egy racionális szám. Ha minden főnököt az r számmal trükkösen eltolunk, akkor egy újabb kontinuum számosságú halmazhoz jutunk, amit F_r -rel jelölünk. Mivel a hosszúság invariáns az eltolással kapcsolatban, és az F_r halmaz eltolással származik F -ből, fennáll, hogy

$$F_r \text{ hossza} \quad = \quad F \text{ hossza}$$

Tehát minden 0 és 1 között r racionális szám esetén az F_r halmaznak ugyanannyi a hossza, mint az F halmaznak.

10.4. Ellentmondásra jutunk

Világos, hogy ha az összes 0 és 1 közötti racionális számmal kapcsolatban tekintjük az F_r halmazokat, akkor ezek diszjunkt halmazok, és egyesítésük a $[0;1)$ intervallum. Ezért

$$[0;1) \text{ hossza} \quad = \sum_{r \text{ racionális szám } 0 \text{ és } 1 \text{ között}} F_r \text{ hossza}$$

Itt a bal oldalon 1 áll, a jobb oldalon pedig egy olyan szumma, ami megszámlálhatóan végtelen sok tagból áll, és minden tag egyforma.

Megszámlalhatóan végtelen sok egyforma tag összege nem lehet 1 -gyel egyenlő, hiszen megszámlalhatóan végtelen sok 0 összege is 0 , és megszámlalhatóan végtelen sokszor véve egy pozitív mennyiséget, az összeg végtelen. Ezért ellentmondásra jutottunk. Az ellentmondás abból származik, hogy az F halmaz hosszáról volt bátorságunk beszélni. Pórul jártunk, mert ellentmondásra jutottunk.

Ha el akarjuk kerülni az ellentmondást, akkor nem szabad azt képzelni, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza, és emellett még az eltolással kapcsolatos invarianciát is fenntartjuk.

Mivel az eltolással kapcsolatos invariancia gondolatmneteinkben nélkülözhetetlen, lemondunk arról, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza. Hasonlóképpen, egy olyan valószínűségszámítási probléma esetén, amikor az eseménytér számossága nagyobb, mint megszálálhatóan végtelen, nem lehet minden részhalmaznak van jól definiált valószínűsége.

A további részletekbe itt most nem megyünk bele, csak megjegyezzük, hogy

- az intervallumok valószínűségeit mindig egyértelműen lehet definiálni, és
- ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaznak lehet definiálni a valószínűségét, akkor ezek
  - komplementerének
  - úniójának
  - metszetének

  szintén lehet definiálni a valószínűségét.

Mivel a gyakorlatban felmerülő részhalmazokhoz az intervallumobkól kiindulva a felsorolt halmazműveletekkel jutunk, a gyakorlati alkalmazásokan felbukanó halmazoknak mindig lehet a valósznínűségéről beszélni. Ahhoz, hogy olyan halmazzal legyen valakinek dolga, aminek nincs valószínűsége, olyan jellegű absztrakt dolgokkal kell foglalkoznia, mint ahogy a főnökök halmazát fentebb értelmeztük.

11. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)*

11.1. A probléma megfogalmazása

Egy átlászó dobozba egymás után teszünk piros és fehér golyókat. A színt véletlenszerűen választjuk. A golyó színe minden alkalommal – az előzőektől függetlenül – 0.6 valószínűséggel piros, 0.4 valószínűséggel fehér. És ezt a folyamatot – a golyók rakosgatását – soha sem hagyjuk abba. Bár az életünk véges, és a gyakorlatban nem tudjuk megtenni, most mégis úgy képzeljük, hogy egy-egy kísérlet egy-egy végtelen hosszú sorozatot ad nekünk. A színsorozat első néhány – mondjuk tíz – tagját le tudjuk írni, például adódhat ez:

```
PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Minden lépés után látjuk a doboz tartalmát:

```
PIROS

PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS,

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Ha minden lépés után tekintjük a pirosak arányát a dobozan, akkor egy tíz hosszúságú számsorozatot kapunk:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{5}{10}$$

Mivel a színek sorozatát a véletlen alakítja, az arányok sorozata is véletlentől függ. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor az arányok sorozata is végtelen hosszú lesz. Ez a végtelen sorozat – véletlentől függően –lehet konvergens is, lehet divergens is. Ha netán konvergens, akkor a határértéke elvileg akármi lehet. Lehet például 0.6 , és lehet bármi más is.

Az alábbiakban azt az eseményt fogjuk vizsgálni, hogy

a pirosak arányainak a sorozata konvergál-e a 0.6 értékhez (vagy nem)

11.2. A valószínűség meghatározása

Ebben az alfejeztben megmutatjuk, hogy

annak a valószínűsége, hogy
a pirosak arányainak a sorozata konvergál a 0.6 értékhez,
1-gyel egyenlő

A valószínűség meghatározása céljából valószínűségi változóknak egy végtelen sorozatát vezetjük be:

- az X_1 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha az első szín piros, 0 , ha fehér
- az X_2 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha a második szín piros, 0 , ha fehér
- az X_3 valószínűségi változó értéke legyen 1 , ha a harmadik szín piros, 0 , ha fehér
- és így tovább ...

Ha a színsorozat első tíz eleme a fentebb példaként vett

`PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR`

színsorozat, akkor a most definiált valószínűségi változó sorozat első tíz eleme az alábbi:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0$$

Ha a színsorozat másképpen alakul, akkor az

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5, \quad X_6, \quad X_7, \quad X_8, \quad X_9, \quad X_{10}$$

értékek mások lesznek. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor végtelen sok X_i véletlen értéket kapunk.

Ezekkel az X_i valószínűségi változókkal a pirosak aránya egyszerűen kifejezhető. Az N -ik lépés után a pirosak aránya nyilván az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

átlag adja meg. Tehát igazolandó, hogy 1 a valószínűsége annak, hogy $N \to \infty$ esetén

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \to 0.6$$

A határérték relációt átírhatjuk így:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \to 0$$

ami nyilván ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \right)^4 \to 0$$

Ennek a trükknek, hogy negyedik hatványra emelünk, lejjebb fogjuk látni a hasznát. Ismeretes, hogy annak igazolásához, hogy egy pozitív tagokból álló sorozat 0 -hoz tart, elegendő azt belátni, hogy a tagokból alkotott végtelen sor konvergens. Ezért elég azt belátni, hogy

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - 0.6 \right)^4 < \infty$$

Mivel a most felírt végtelen sor értéke véletlentől függ, az összeg egy Z valószínűségi változót definiál:

$$Z \;=\; \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4$$

Mivel minden tag értéke nagyobb vagy egyenlő 0 -nál, a Z valószínűségi változónak az értéke is biztos, hogy nagyobb vagy egyenlő 0 -nál. Viszont amikor a véletlen úgy hozza, a sor divergálhat a végtelenhez. Ilyenkor a Z valószínűségi változó értékét értelemszerűen végtelennek tekintjük.

Ha egy nemnegatív valószínűségi változó pozitív valószínűséggel végtelen értékű, akkor várható értéke nyilván végtelen. Ezért ahhoz, hogy egy nemnegatív valószínűségi változóra belássuk, hogy 1 valószínűséggel véges értékű, elég azt belátni, hogy a várható értéke véges. Ezért most meg fogjuk mutatni, hogy Z várható értéke véges:

$$\mathrm{E}(\,Z\,) \;=\; \mathrm{E}\left(\;\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \;\right) \;<\; \infty$$

Itt a várható érték képzést és a szummázást fel lehet cserélni, ezért azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\; \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \infty$$

11.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása

A sor konvergenciájához elég azt belátni, hogy minden N -re teljesül az

$$\mathrm{E}\left(\; \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \;\right) \;<\; \frac{4}{N^2}$$

egyenlőtlenség. Ennek a becslésnek az igazolása céljából a zárójelben álló kifejezést átírjuk így:

$$\mathrm{E}\left(\; \left(\frac{(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \;\right)$$

A hatványozást pedig külön végezzük el a számlálóban és a nevezőben:

$$\mathrm{E}\left(\frac{(\;\; (X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6) \;\;)^4}{N^4} \right)$$

Gondoljuk most meg, hogy amikor a számlálóban álló

$$(\;\; (X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6) \;\;)^4$$

negyedik hatványt kifejtjük, milyen jellegű tagok keletkeznek!

Leszen olyan tagok, melyekben valamelyik

$$(X_i - 0.6)$$

kifejezés az első hatvánnyal szerepel, további tényezőkkel megszorozva. Ez a tényező független a többi tényezőtől, ezért a várható érték tényezőnként vehető. Mivel

$$\mathrm{E}(X_i - 0.6) \;=\; 0$$

ezeknek a tagoknak a várható értéke 0, így ezek a tagok a várható érték számításakor eldobhatóak.

Maradnak az olyan tagok, melyekben minden $(X_i - 0.6)$ tényező legalább második hatványon szerepel. Ilyen tag kétféle van:

$$(X_i - 0.6)^4$$

alakú, illeve

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

alakú, ahol $i \neq j$. Mivel $(X_i - 0.6)$ abszolút értéke 1 -nél kisebb, az ilyen tagok abszolút értéke 1 -nél, kisebb, ezért a várható értékeik is kisebbek 1 -nél.

Most megszámoljuk, hogy hány ilyen tag adódik. Az

$$(X_i - 0.6)^4$$

jellegű tagok száma nyilván N . Az

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

jellegű tagok száma, ahol $i \neq j$, egyenlő $\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2}$ -vel, hiszen az i, j indexpár választása $\binom{N}{2}$ lehetőséget ad, és adott i, j indexpár esetén a negyedik hatvány kifejtésénél, ami egy négy tényezős szorzat kifejtését jelenti, a négy tényező $\binom{4}{2}$ lehetőséget ad az i, j indexpár választására. Vegyük észre, hogy

$$\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2} \;=\; \binom{N}{2} \cdot 6 \;=\; 3N(N-1) \;<\; 3N^2$$

Mindebből kiadódik, hogy

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \;(X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \right) \;<\; \frac{N + 3N^2}{N^4} \;<\; \frac{4 \cdot N^2}{N^4} \;<\; \frac{4}{N^2}$$

11.3. Az általános eset megfogalmazása

Természetesen a 0.6 valószínűségérték tetszőleges p -re cserélhető:

Ha a minden lépésnél
– az előzőektől függetlenül –
p **valószínűséggel jön piros,**
$1 - p$ **valószínűséggel fehér,**
akkor
annak a valószínűsége, hogy a pirosak arányainak a sorozata konvergál a p **értékhez,** 1 **-gyel egyenlő .**

11.4. Miért hívjuk az erős törvényt *erős*nek?

Valószínűségszámítás tanulmányaink kezdetén általában – tapasztalatinkra hivatkozva leszögezzük –, hogy nagy számú független kísérlet esetén az esemény relatív gyakorisága közel van az esemény valószínűségéhez. Annak ellenére, hogy az ott használt kifejezések, mint "nagy számú kísérlet", "közel van" a hétköznapi élet szintjén többnyire elfogadhatóak, most mégis örülni lehet annak, hogy ezeket a kifejezéseket ki tudtuk cserélni a konvergencia fogalmára, hiszen levezettük, hogy **egy esemény relatív gyakoriságainak sorozata 1 valószínűséggel konvergál az esemény valószínűségéhez**. Ennek a matematikai állításnak a neve: **nagy számok erős törvénye a relatív gyakoriságokra**. Ez "erős" jelzővel itt arra utalunk, hogy a konvergencia tényét 1 valószínűséggel állítjuk – más, itt nem részletezendő "gyengébb" konvergencia foglamakkal szemben.