Valószínűségszámítás
4. RÉSZ
Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András

2019. április 29.

Vetier András — Valószínűségszámítás — 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSC hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztunovember 29.

Vetier András

Vetier András – Valószínűségszámítás 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

1. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$$

   (a) Szemléltesse az eloszlást "festékkel"!
   (b) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!
   (c) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
   (d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?
   (e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?
   (f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?
   (g) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (h) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (i) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (j) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

2. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c(x + y) \quad (x > 0, \ \ y > 0, \ \ x + y < 1)$$

   ahol c egy alkalmas konstans.

   (a) Határozza meg a c konstans értékét!
   (b) Szemléltesse az eloszlást "festékkel"!
   (c) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!
   (d) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
   (e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?
   (f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?
   (g) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?

3. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c(2x + y) \quad (x > 0, \ \ y > 0, \ \ x + y < 1)$$

   ahol c egy alkalmas konstans.

   (a) Határozza meg a c konstans értékét!
   (b) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Számolja ki a P($Y < 0.1 | X = 0.25$) feltételes valószínűséget!
   (e) Számolja ki a P($Y < 0.1 | X = 0.50$) feltételes valószínűséget!
   (f) Számolja ki a P($Y < 0.1 | X = 0.75$) feltételes valószínűséget!
   (g) Számolja ki a P($Y < 0.1 | X = x$) feltételes valószínűséget!
   (h) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (i) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (j) Számolja ki a P($X < 0.1 | Y = 0.25$) feltételes valószínűséget!
   (k) Számolja ki a P($X < 0.1 | Y = 0.50$) feltételes valószínűséget!

Vetier András _Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

(l) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.75)$ feltételes valószínűséget!

(m) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y)$ feltételes valószínűséget!

Megoldás:

(a) $c = 2$, vagyis $\quad f(x, y) = 2(2x + y) = 4x + 2y \qquad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$

(b) $f_1(x) = 2x - 3x^2 + 1 \qquad (0 < x < 1)$

$F_1(x) = x^2 - x^3 + x \qquad (0 < x < 1)$

(c) $f_{2|1}(y|x) = \frac{4x+2y}{2x-3x^2+1} \qquad (0 < x < 1 - y < 1)$

$F_{2|1}(y|x) = \frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1} \qquad (0 < x < 1 - y < 1)$

(d) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.25) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.25,\ y=0.1} = 0.080$

(e) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.50) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.50,\ y=0.1} = 0.164$

(f) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.75) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.75,\ y=0.1} = 0.375$

(g) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = x) = F_{2|1}(0.1|x) = \frac{0.4x+0.01}{2x-3x^2+1}$ $\qquad$ ha $0 < x < 0.9$

$\mathrm{P}(Y < 0.1|X = x) = 1$ $\qquad$ ha $0.9 < x < 1$

(h) $f_2(y) = 2 - 2y \qquad (0 < y < 1)$

$F_2(y) = 2y - y^2 \qquad (0 < y < 1)$

(i) $f_{1|2}(x|y) = \frac{2x+y}{1-y} \qquad (0 < y < 1 - x < 1)$

$F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y} \qquad (0 < y < 1 - x < 1)$

(j) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.25) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.25} = 0.047$

(k) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.50) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.50} = 0.120$

(l) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.75) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.75} = 0.340$

(m) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y) = F_{1|2}(0.1|y) = \frac{0.01+0.1y}{1-y}$ $\qquad$ ha $0 < y < 0.9$

$\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y) = 1$ $\qquad$ ha $0.9 < y < 1$

4. Reggel taxival megyek az egyetemre. A várakozási időm percekben mérve X. Feltesszük, hogy X exponenciális eloszlást követ $\lambda_1 = 0.1$ paraméterrel. Este taxival megyek haza. A várakozási időm percekben mérve Y. Feltesszük, hogy Y exponenciális eloszlást követ $\lambda_2 = 0.2$ paraméterrel. A két várakozási idő független egymástól.

   (a) Határozza meg az $f(x, y)$ síkbeli sűrűségfüggvény képletét!

Vetier András: Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < 15$?

(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < z$?

(d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$?

(e) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$, feltéve, hogy $X + Y < 15$?

Az alábbi, "pince-világítással kapcsolatos" feladatok egymásra épülnek. A feladat-sorozat lépésről-lépésre levezeti a gamma eloszlások sűrűségfüggvényeinek a képletét.

5. *Másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Sötét pincénkben állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzóim. Sajnos csak két izzóm van. Ezeket egymás után fogom használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a második is kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a második izzó kiég.)*

   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

6. *Harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Szomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő gazdagabb, neki három izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a második izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a harmadik is kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a harmadik izzó kiég.)*

   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

7. *Negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Másodszomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még gazdagabb, neki négy izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a harmadik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.)*

   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

8. *Ötödrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Harmadik szomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még a másodszomszédomnál is gazdagabb, neki öt izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a negyedik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az ötödik izzó kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg, és akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor aaz ötödik izzó kiég.)*

   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

9. *n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése a teljes indukció módszerével:*
A jó hosszú utcánk végében lakó ember pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Neki – mondjuk – n izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az $(n-1)$ -edik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az n -edik izzó kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt a teljes indukció módszerének megfelelően – okosan – vegye fel!*

   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!

   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez az n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a n -edik izzó kiég.)*

   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Együttes folytonos valószínűségi változók (Feladatok)

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás

1. Egy bolha az origóból indulva a pozitív irányba ugrál. Ugrásainak nagysága független egymástól, és deciméterben mérve egyenletes eloszlást követ 30 és 60 között. Legyen X annak a pontnak a koordinátája, ahova először ugrik, Y pedig annak a pontnak a koordinátája, ahova másodszor ugrik.
   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

2. Az origó középpontú, egységnyi sugarú körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy (X, Y) pontot.
   (a) Határozza meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Határozza meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

3. Béta eloszlások kétdimenzióban

1. Öt jóbarát mindegyike a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Legyen X az az időpont, amikor a már négyen vannak, és legyen Y az az időpont, amikor a már mind az öten ott vannak. Ha van rá lehetősége, szimulálja a jelenséget és a valószínűségi változókat! Az alábbi feladatok megértésében és megoldásában sokat segít, ha érti, látja, hogy mi történik, hogyan dolgozik a véletlen!

   (a) Fókuszáljunk először csak az Y valószínűségi változóra!

      i. Határozza meg az
      $$Y < 0.75$$
      esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy mindenki odaér háromnegyed egy előtt.)

      ii. Határozza meg Y eloszlásfüggvényének a képletét!

      iii. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

      iv. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

   (b) Fókuszáljunk most csak az X valószínűségi változóra!

      i. Határozza meg az
      $$X < 0.25$$
      esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt. A binomiális eloszlás képletét összegzésekkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

      ii. Határozza meg X eloszlásfüggvényének a képletét!

      iii. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

      iv. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

   (c) Most foglalkozzunk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval!

      i. Határozza meg az
      $$X < 0.25 \text{ és } Y < 0.75$$
      esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt, és mindenki odaér háromnegyed egy előtt. A polinomiális eloszlás összegzésekkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

      ii. Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

      iii. Határozza meg (X, Y) eloszlásfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke

1. Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása táblázattal megadva így fest:

y					
5	0.060	0.120	0.090	0.030	
4	0.080	0.160	0.120	0.040	
3	0.030	0.060	0.045	0.015	
2	0.020	0.040	0.030	0.010	
1	0.010	0.020	0.015	0.005	
	1	2	3	4	x

   Határozza meg

   (a) az XY szorzatának,
   (b) az Y/X hányados,
   (c) az X/Y hányados

   a várható értékét!

2. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = x + y \qquad (x > 0, \;\; y > 0, \;\; x + y < 1)$$

   Határozza meg

   (a) az XY szorzatának,
   (b) az Y/X hányados,
   (c) az X/Y hányados

   a várható értékét!

3. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 4x + 2y \qquad (x > 0, \;\; y > 0, \;\; x + y < 1)$$

   Határozza meg

   (a) az XY szorzatának,
   (b) az Y/X hányados,
   (c) az X/Y hányados

   a várható értékét!

Vetier András: Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

1.

2.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

6. Vetület- és feltételes eloszlások

1. Tekintjük a $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ pontok által meghatározhott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást. Határozza meg
   - az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,
     (e) a feltételes varianciáját
     (f) a feltételes szórását!
   - az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,
     (e) a feltételes varianciáját
     (f) a feltételes szórását!

2. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg
   - az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,
     (e) a feltételes varianciáját
     (f) a feltételes szórását!
   - az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,
     (e) a feltételes varianciáját
     (f) a feltételes szórását!

3. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg
   - az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,
     (e) a feltételes varianciáját
     (f) a feltételes szórását!

Vetier András: Valószínűségszámítás 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!

4. Kalkulátor vagy a számítógép által előállított 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számokra építve definiáljon olyan kétdimenziós valószínűségi változót, mely az alább megadott eloszlásokat követi. Az eloszlásokat a sűrűségfüggvényükkel adjuk meg:
   (a) $f(x, y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$
   (b) $f(x, y) = x + y \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$
   (c) $f(x, y) = 4x + 2y \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

7. Transzformáció síkról síkra

1. Az (x, y) -sík egységnégyzetén vett egyenletes eloszlást transzformáljuk az $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ transzformációval az (u, v) -síkra.
   (a) Határozza meg az egységnégyzet képét!
   (b) Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!
2. Az (x, y) -sík egységnégyzetén tekintjük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$. Az eloszlást az (u, v) -síkra transzformáljuk az $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ transzformációval. Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

8. Lineáris transzformáció síkról síkra

1. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 3y \\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

2. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 5y \\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

3. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 6y + 10 \\ v &= x + 2y - 5 \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9. Transzformáció síkról egyenesre

1. Köralakú céltáblára lövünk. A kör sugara 1 méter. A találat helye egyenletes eloszlást követ a körlapon. A találat helyének távolsága

   - a kör középpontjától
   - a kör kerületétől

   véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

   (a) eloszlásfüggvényét!
   (b) sűrűségfüggvényét!

2. Hatalmas köralakú céltáblára lövünk. A találat helye standrd normális eloszlást követ a körlapon. A találat helyének

   - a kör középpontjától való távolsága
   - a kör középpontjától való távolságának a négyzete

   véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

   (a) eloszlásfüggvényét!
   (b) sűrűségfüggvényét!

3. A $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ pontok által meghatározhott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást veítjük

   (a) az x -tengelyre,
   (b) az y -tengelyre

   Milyen eloszlásokat kapunk a tengelyeken?

4. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg

   (a) az x -tengelyre,
   (b) az y -tengelyre

   vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

5. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg

   (a) az x -tengelyre,
   (b) az y -tengelyre

   vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

6. Tegyük fel, hogy az (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x,y) = 4x + 2y \qquad (x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1)$ Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

7. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten egyenletes eloszlást követnek 0 és 1 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

8. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X egyenletes eloszlást követ 0 és 3 között, Y pedig egyenletes eloszlást követ 0 és 5 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

Vetier András – Valószínűségszámítás 2. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X λ_1 paraméterű, Y pedig λ_2 paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg $X+Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

11. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3 függetlenek, és mindhárman λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1+X_2+X_3$ sűrűségfüggvényének a képletét!

12. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3, X_4 függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1+X_2+X_3+X_4$ sűrűségfüggvényének a képletét!

13. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1+X_2+\ldots+X_n$ sűrűségfüggvényének a képletét!

14. $\sqrt{RND_1}+\sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $2/3z^3$ ha $0<z<1$, $-2/3(z^3-6z+4)$ ha $1<z<2$

15. $\sqrt{RND_1}+2\cdot\sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $z^3/6$ ha $0<z<1$, $z/2-1/3$ ha $1<z<2$, $-z^3/6+5z/2-3$ ha $2<z<3$

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel

1. Ha a Hoppantó Bolhának azt mondjuk, hogy "HOPP!", akkor ugrik egy nagyot. Az ugrásának (méterben mért) nagysága véletlentől függ. Ezt a valószínűségi változót X -szel jelöljük. Ebben a feladatban feltesszük, hogy X egyenletes eloszlást követ 4 és 6 között. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy

   - az eseteknek kb. a negyedében 4 méternél nagyobbat, de 4.5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 4.5 méternél nagyobbat, de 5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 5 méternél nagyobbat, de 5.5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 5.5 méternél nagyobbat, de 6 méternél kisebbet ugrik.

   A bolha szeret a véletlennel és a pénzzel játszani. Ha olyan adakozó emberre akad, aki beigéri neki, hogy fizetni fog, és csak úgy kijelent egy c konstans számot is, akkor elkezd ugrálni, és jó sok (mondjuk kb. 100) ugrást végez. A szabályok szerint az adakozó ember minden egyes ugrás után fizet:

   - ha $X > c$, akkor $(X - c)$ -szer 10 forintot,
   - ha $X < c$, akkor $(c - X)$ -szer 20 forintot.

   Ezért a bevállalós ember vesztesége ugrásonként:

   - ha $X > c$, akkor $10 \cdot (X - c)$ forint,
   - ha $X < c$, akkor $20 \cdot (c - X)$ forint.

   Hogyan válassza meg a bevállalós ember a c konstans számot, ha azt akarja, hogy veszteségének ugrásonkénti várható értéke minimális legyen?

2. *(Az előző feladat folytatása)* Ebben a feladatban a Hoppantó Bolha ugrásának nagysága normális eloszlást követ 5 méter várható értékkel és 1 méter szórással. A kérdés ugyanaz, mint az előző feladatban.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

11. Normális eloszlások a síkon

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)