4. fejezet

Mátrixok jellemzése

Az előző fejezetben megismerkedtünk a mátrixműveletekkel, azok tulajdonságaival. Ebben a fejezetben a mátrixok különféle jellemzőit vizsgáljuk, melyek segítségével arról a dologról is értékes információhoz juthatunk, melynek leírására mátrixmodellt alkalmazunk.

4.1. Mátrixhoz tartozó alterek

Fontos jellemzője egy mátrixnak, hogy milyen struktúrából valók az elemei, sor- és oszlopvektorai. E vektorokról pedig az általuk kifeszített altér árulhat el sokat.

Egy mátrix elemei. Eddig nagyvonalúan bántunk a mátrix elemeivel. Leginkább annyit feltételeztünk róluk, többnyire kimondatlanul, hogy azonos algebrai struktúrából valók, és az összeadás, kivonás és a szorzás elvégezhető köztük. Erre volt szükség például a mátrixösszeadás és szorzás elvégzéséhez. Bizonyos feladatokhoz még osztásra is szükség volt, mint például az invertáláshoz, de használtuk a redukált lépcsős alak megkonstruálásakor is. A példákban eddig leggyakrabban egész vagy racionális számokat használtunk, de közben valósokra is gondolhattunk, esetleg valamely maradékosztály elemeivel számoltunk. Később olyan mátrixokkal is foglalkozunk, amelyek elemei komplex számok, polinomok, trigonometrikus vagy más függvények....

Az algebrai absztrakció lényege, hogy ha egy algebrai struktúrára vonatkozó állítás igazolásához csak bizonyos műveleti tulajdonságokat használunk, akkor az állítás minden olyan struktúrában is igaz lesz, amely rendelkezik e műveleti tulajdonságokkal. Ha pedig azt látjuk, hogy bizonyos tulajdonságok fontos szerepet játszanak, és különböző struktúrákban gyakran előfordulnak, absztrakcióval új fogalmat alkotunk. Így született a racionális, valós, és komplex számok, valamint a prímmel való osztás maradékaival való számolás közös tulajdonságaiból az algebrai test fogalma.

4.1. definíció: Test. Egy legalább kételemű $\mathbb{T}$ halmazt *testnek*, vagy *algebrai testnek* nevezünk, ha

1. értelmezve van $\mathbb{T}$ elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű *bináris művelet*,
2. az *összeadás* kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),
3. a *szorzás* kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),
4. az összeadás a szorzásra nézve disztributív.

Ha a szorzás csak asszociatív, *gyűrűről* beszélünk, ha kommutatív is, *kommutatív gyűrűről*, ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, *egységelemes gyűrűről* beszélünk.

Formalizálva a fenti definíciót, egy test a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Bármely $a, b \in \mathbb{T}$ elemre $a + b \in \mathbb{T}$ és $ab \in \mathbb{T}$.
- Bármely $a, b \in \mathbb{T}$ elemre $a + b = b + a$ és $ab = ba$.
- Bármely $a, b, c \in \mathbb{T}$ elemre $(a+b)+c = a+(b+c)$ és $(ab)c = a(bc)$.
- Van olyan $\mathbb{T}$-beli elem, jelölje 0, hogy bármely $a \in \mathbb{T}$-re $0 + a = a$.
- Bármely $a \in \mathbb{T}$ elemhez van olyan $b \in \mathbb{T}$, hogy $a + b = 0$.
- Van olyan $\mathbb{T}$-beli elem, jelölje 1, hogy bármely $a \in \mathbb{T}$ elemre $1a = a$.
- Bármely $a \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ (tehát bármely nem nulla) elemhez van olyan $b \in \mathbb{T}$, hogy $ab = 1$.
- Bármely $a, b, c \in \mathbb{T}$ elemre $(a + b)c = ac + bc$.

Néhány megjegyzés és néhány példa:

▶ Meg lehet mutatni, hogy a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző, tehát jogosan jelöltük őket különböző jellel.

▶ Minden gyűrű tetszőleges a elemére igaz, hogy $0a = a0 = 0$.

▶ Testre példa a valós számok $\mathbb{R}$, a racionális számok $\mathbb{Q}$, a komplex számok $\mathbb{C}$, a prím modulusú maradékosztályok $\mathbb{Z}_p$ struktúrája.

▶ A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza nem test és nem is gyűrű a szokásos műveletekkel, mert nincs minden elemnek ellentettje (a -1 nem természetes szám).

▶ A $\mathbb{Z}$ egységelemes kommutatív gyűrű, viszont nem test, mert nincs minden nemnulla elemnek multiplikatív inverze (az $1/5$ nem egész).

▶ A $\mathbb{Z}_m$ egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.

▶ A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

▶ Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak. Ugyanígy egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvények, vagy a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett és folytonos függvények. A műveletek minen esetben a függvények szokásos összeadása és szorzása.

▶ A végtelen sorozatok az elemenkénti összeadás és szorzás műveletére nézve ugyancsak egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

A valós számokhoz hasonlóan egy $\mathbb{T}$ test elemeiből képzett rendezett n-esek halmazán, azaz a $\mathbb{T}$ test feletti n-dimenziós vektorok $\mathbb{T}^n$ halmazán bevezethetünk két műveletet, a vektorösszeadás és a $\mathbb{T}$ elemeivel való szorzás műveletét. Az így kapott struktúrára, mint a $\mathbb{T}^n$ vektortérre fogunk hivatkozni. A $\mathbb{T}$ elemeiből képzett $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{T}^{m\times n}$ jelöli.

4.2. példa: Négyzetes mátrixok gyűrűje. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{T}$ test, akkor $\mathbb{T}^{n\times n}$ elemei, azaz a $\mathbb{T}$ fölötti $n \times n$-es mátrixok a szokásos mátrixműveletekkel egységelemes gyűrűt alkotnak.

Megoldás. Az előző fejezetben láttuk, hogy a mátrixok összeadása és szorzása nem vezet ki az $n \times n$-es mátrixok halmazából, és hogy az összeadás kommutatív, asszociatív, a zérusmátrix nullelemként viselkedik, és minden mátrixnak van ellentettje. Hasonlóan láttuk, hogy a szorzás asszociatív, és van egységelem (az identikus vagy egységmátrix). Végül az összeadás a szorzásra nézve disztributív. Tehát az $n \times n$-es mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. Az $n = 1$ esetben magát $\mathbb{T}$-t kapjuk meg, ami test. Ahhoz, hogy $n > 1$ esetén a struktúra nem test, sőt, nem is kommutatív azt kell belátni, hogy mindig találunk két nem felcserélhető és egy szinguláris mátrixot.

A csupa 1-esből álló mátrix mindig szinguláris, ugyanis van legalább két sora, és bármely sora megegyezik az elsővel, tehát az elemi sorműveletek során biztosan keletkezik legalább egy nullasor.

Az alább összeszorzott két mátrix, melyeknek csak a bal felső 2×2-es részében van 0-tól különböző elem, sosem felcserélhető, ugyanis egyrészt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

másrészt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Hozzá kell még tenni, hogy $1 + 1 = 1$ semelyik testben sem áll fenn, ugyanis 1-et kivonva $1 = 0$-t kapnánk. (Tudjuk, hogy $\mathbb{F}_2$-ben $1 + 1 = 0$, ahol pedig nem nulla, ott jelölhetjük 2-vel.) ■

Lineáris függetlenség és összefüggőség. Mátrix rangja megegyezik lépcsős alakjának nemzérus sorai számával. Ha a mátrix egy megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa, akkor a rang megegyezik a megoldás kötött változóinak számával. De vajon magukról az egyenletekről mit árul el e szám? Meg fogjuk mutatni, hogy a lineárisan független egyenletek számát, azaz azt mutatja, hogy az egyenletrendszerben hány egyenlet „számít”, a többi akár el is hagyható a megoldás megváltozása nélkül.

Az 1.8. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora *egyértelműen* előáll lineáris kombinációjukként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: mindegyik vektort 0-val szorozzuk – ezt nevezzük a nullvektor triviális előállításának. És a fenti szerint más előállítása nincs is. Ez adja az ötletet a következő tételhez:

4.3. tétel: Lineáris függetlenség szükséges és elégséges feltétele. A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor *lineárisan függetlenek*, ha a zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – állhat elő lineáris kombinációjukként. Másként fogalmazva, a fenti vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a c_1, $c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjuk csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

($\Longleftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \ldots, k$). Tegyük fel indirekt módon, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, ezért feltevésünkkel ellentmondásban előállítottuk a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.

($\Longrightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0. Ekkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. ■

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus.

Egy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{illetve az} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert, ahol $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan független.

4.4. következmény: Homogén lineáris egyenletrendszer és a lineáris függetlenség. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása, azaz ha $\mathbf{A}$ lépcsős alakjában minden oszlopban van főelem.

4.5. példa: Vektorok lineáris függetlensége. Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&0&1\\4&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. ∎

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrixot lépcsős alakra hoztuk. Ebből az alakból azonban sokkal több leolvasható a vektorok lineáris függetlenségénél.

4.6. TÉTEL: ELEMI SORMŰVELETEK HATÁSA A SOR- ÉS OSZLOPVEKTOROKRA. Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy egy mátrix sortere nem változik az elemi sorműveletek közben. A sorcserére ez nyilvánvaló. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, ami azt jelenti, hogy vannak olyan c_1, $c_2, \ldots, c_m$ skalárok, hogy

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor $\mathbf{u}$ az új mátrix sorterében is benne van, melyet a $d\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektorok feszítenek ki, hisz

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d}(d\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ez azt jelenti, hogy a sortér nem csökken, azaz minden vektor, ami eddig benne volt a sortérben, benne lesz az új mátrix sorterében is. A hozzáadás műveleténél ugyanezt tapasztaljuk: az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első sor d-szeresét adjuk a második sorhoz. Ekkor az új sorteret kifeszítő vektorok: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Az $\mathbf{u}$ vektor e térben is benne van, ugyanis egy egyszerű átalakítás után

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d)\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \ldots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Mivel minden sorművelet inverze is egy sorművelet, az inverz sorműveletben sem csökken a sortér, ami csak úgy lehet, ha a sortér az elemi sorműveletek során változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közt nem változnak a lineáris kapcsolatok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy például $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Mivel a skalárral való szorzás és a vektorösszeadás is koordinátánként végezhető, könnyen látható, hogy sorcsere, egy koordináta nemnulla skalárral való szorzása, vagy az i-edik koordináta konstansszorosának a j-edikhez adása után is fönn fog állni a két új vektor közt a fenti összefüggés. Tetszőleges számú vektor lineáris kombinációjára az állítás hasonlóan adódik. ∎

4.7. KÖVETKEZMÉNY: MÁTRIX LÉPCSŐS ALAKJÁNAK VEKTORAI. Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

Bizonyítás. Az első két állítás közvetlen következménye az előző tételnek.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k-adik sorvektorát. Főeleme legyen a j-edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k-nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j-edik koordináta 0. A k-nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k-adik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai $\mathbf{B}$-ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok $\mathbf{A}$-ban is lineárisan függetlenek. ∎

Fontos megjegyezni, hogy míg a lépcsős alak sortere megegyezik az eredeti mátrix sorterével, addig az oszloptér az elemi sorműveletek alatt megváltozik, tehát a mátrix és lépcsős alakjának oszloptere különbözik!

Bázis. Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sorterében és oszlopterében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.7. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármasokat, melyeket egy koordinátarendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

4.8. definíció: Bázis. Tekintsük a $\mathbb{T}^n$ tér egy alterét, azaz vektorainak egy olyan részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összegének műveletére. Az *altér bázisán* vektorok olyan halmazát értjük, mely

1. lineárisan független vektorokból áll és
2. kifeszíti az alteret.

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{T}^n$ *standard bázisának* nevezzük.

4.9. példa: Altér bázisának meghatározása. Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

Megoldás. A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Másik megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1,1,0,-2)$ és $(2,3,3,-2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. ■

4.10. PÉLDA: VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT. Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&3&2&3\\0&3&3&6\\-2&-2&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\3\\-2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\3\\3\\-2\end{bmatrix}.$$

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, más bázisra juthatunk. Például

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\3&1&3&2\\6&0&3&3\\2&-2&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-2&-3&-1\\0&-6&-9&-3\\0&-4&-6&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&\frac12&\frac12\\0&1&\frac32&\frac12\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk az $(1,3,6,2)$ és az $(1,1,0,-2)$ vektorokat is, a többi vektor pedig kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix}2\\3\\3\\-2\end{bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix}+\frac32\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix}+\frac12\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}.$$

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja. A koordinátarendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansaiból áll.

Egy altérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. A félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük, azaz a $\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakját az $\mathcal{A}$ bázisban $[\mathbf{v}]_\mathcal{A}$ jelöli.

Például az előző példában a (4.1) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&2\end{bmatrix}$$

mátrix a következőket mondja. A $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 0)$ és $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altérnek $A = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \,\}$ egy bázisa, és ebben a bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$[\mathbf{v}_1]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_2]_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_3]_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_4]_A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp a (4.2) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti altérnek $B = \{\, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \,\}$ is bázisa, és ebben a bázisban a $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ koordinátás alakja rendre

$$[\mathbf{v}_4]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_2]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix},\ [\mathbf{v}_3]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bázisfelbontás és a megoldás blokkmátrix alakja*. A 4.7. tétel második pontjának az előző feladatban is szemléltetett egyenes következménye, a következő állítás.

4.11. ÁLLÍTÁS: BÁZISFELBONTÁS. Jelölje egy $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló $r \times n$-es részmátrixát $\mathbf{R}$, az $\mathbf{R}$ főoszlopainak megfelelő $\mathbf{A}$-beli oszlopok alkotta $m \times r$-es részmátrixot $\mathbf{B}$, ahol $r = \operatorname{rang} \mathbf{A}$. Ekkor az $\mathbf{R}$ mátrix j-edik oszlopa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopának a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Egy mátrix fenti $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$ alakú felbontását *bázisfelbontásnak* nevezzük.

4.12. PÉLDA: BÁZISFELBONTÁS. Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ és az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Ellenőrizzük, hogy az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{B}[\mathbf{v}]_B,$$

ahol az E indexszel a standard, B-vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{a}_4]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora. ■

4.13. példa: Nulltér bázisa. Határozzuk meg az alábbi mátrix nullterének bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A nulltér, azaz a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere könnyen leolvasható a redukált lépcsős alakból.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szabad változókhoz rendelt paraméterek legyenek $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, amiből $x_1 = -t_1 - 2t_2 - 7t_3$ és $x_2 = -t_1 - t_2 + t_3$. Innen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix},$$

azaz a nullteret három vektor feszíti ki. Vegyük észre, hogy a redukált lépcsős alak blokkszerkezete

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

és a megoldás

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{t}$$

alakú, ahol $\mathbf{t}$ a paraméterek vektora. Itt csak annyi a kérdés, hogy a nullteret kifeszítő három vektor független-e. Ez jól látszik a három vektorból képzett mátrixon, mivel annak alsó blokkja $\mathbf{I}_3$, ami három független oszlopvektorból áll, és ezek akkor is függetlenek maradnak, ha eléjük további koordinátákat illesztünk. ■

4.14. tétel: A megoldás felírása blokkmátrixokkal. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Bizonyítás. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss – Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{B}_r \begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{S}\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}\mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r (\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s) = \mathbf{B}_r \mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítást. ■

4.15. TÉTEL: A NULLTÉR BÁZISA. Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

ahol $s = n - r$ a szabad változók száma, és a $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]$ mátrix oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás közvetlen következménye a 4.14. tételnek, csak azt kell belátni, hogy $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják. Ez abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. ■

Dimenzió és rang. Az előzőekben bázist kerestünk egy altérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt. Ez nem véletlen. Egy különösen fontos tétel következik.

4.16. TÉTEL: BÁZIS-TÉTEL. Tekintsük a $\mathbb{T}^n$ vektortér egy tetszőleges alterét. Ennek bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\mathbb{T}^n$-nek van olyan $\mathcal{A}$ altere, és annak két olyan bázisa,

$$V = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}, \text{ és } W = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r \}.$$

melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel V bázis $\mathcal{A}$-ban, ezért a W bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \tag{4.4}$$

Mivel a W bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (4.4) egyenlőségeit a (4.5) egyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned}c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \dots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

aminek V vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \dots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned}
a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r &= 0\\
a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r &= 0\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\ &\\
a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 2.36. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát valóban, egy altér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll. ■

Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti. Azaz minden bázisa kételemű. Ha egy origón átmenő egyenest tekintünk, azt minden nemnulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. A hétköznapi életben is használt fogalom, a dimenzió, megegyezik a bázis elemszámával. Miután egy altér minden bázisa azonos elemszámú, értelmes a következő definíció:

4.17. definíció: Dimenzió. A $\mathbb{T}^n$ tér egy $\mathcal{A}$ alterének *dimenzióján* egy bázisának elemszámát értjük, és e számot $\dim \mathcal{A}$-val jelöljük.

A $\mathbb{T}^n$ altere saját magának, és standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{T}^n = n$. A nullvektorból álló altérben nincsenek független vektorok, így dimenziója 0.

Adott véges sok $\mathbb{T}^n$-beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

4.18. állítás: Dimenzió = rang. Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}^T)$.

Bizonyítás. A mátrix rangja megegyezik lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. A 4.7. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^T$ oszlopterével. ■

4.19. definíció: Vektorrendszer rangja. Egy $\mathbb{T}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer *rangján* a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.

4.20. példa: Dimenzió kiszámítása. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. ■

4.21. tétel: Dimenziótétel. Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n.

Az angol nyelvű szakirodalomban szokás az $\mathbf{A}$ mátrix sorterét $\operatorname{row}(\mathbf{A})$-val, nullterét $\operatorname{null}(\mathbf{A})$-val jelölni. E jelöléssel a tétel állítása:

$$\dim(\operatorname{row}(\mathbf{A})) + \dim(\operatorname{null}(\mathbf{A})) = n.$$

Bizonyítás. A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a kötött változók számával, míg a nulltér a szabad változók számával (ld. 4.15). Ezek összege n. ■

A sortér és a nulltér egy másik fontos tulajdonsággal is rendelkezik: merőlegesek egymásra. Ez lehetővé teszi, hogy ha ismerjük e két tér egyikét, a másikat egyértelműen meghatározhassuk. Erre a későbbi fejezetekben visszatérünk.

4.22. definíció: Alterek merőlegessége. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{T}^n$ tér két altere *merőleges* egymásra, ha az egyik minden vektora merőleges a másik minden vektorára.

4.23. állítás: Sortér és nulltér merőlegessége.. Egy mátrix sorterének minden vektora merőleges nullterének minden vektorára, azaz sortere és nulltere merőlegesek egymásra.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Az $\mathbf{A}$ nullterének vektorai megoldásai az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{A}$ minden sorvektora merőleges minden megoldásvektorra. Ha viszont minden sorvektor merőleges, akkor azok tetszőleges lineáris kombinációi is, ugyanis ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges megoldásvektor, akkor

$$(c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \ldots + c_m\mathbf{a}_{m*})\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_{1*}\mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*}\mathbf{x} + \ldots + c_m\mathbf{a}_{m*}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

azaz minden megoldás merőleges a sortér minden vektorára. ■

Elemi bázistranszformáció*. Az előző paragrafusban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ezt a paragrafust arra szánjuk, hogy a vektortér struktúrája felől is megértsük, mi történik akkor, amikor a mátrix egy oszlopában főelemet (pivotelemet) választunk, és oszlopának többi elemét elimináljuk. A folyamat lényege egy kétoszlopos mátrixon is jól szemléltethető. Az egyszerűség kedvéért a két oszlop legyen az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, a bázist, melyben e vektorok meg vannak adva, legyen a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbölés eredményeként a következőket kapjuk.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{bmatrix}$$

Tudjuk, az oszlopok az elemi sorműveletek után az eredeti vektorokat adják egy másik bázisban. Az $\mathbf{a}$ vektor nyilvánvalóan egy olyan bázisban lett felírva, amelyben szerepel az $\mathbf{a}$ vektor is, mégpedig ez az i-edik bázisvektor. Megmutatjuk, hogy mindkét oszlop az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_i + 1, \ldots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az $\mathbf{a}$ vektorra ez nyilván igaz. Nézzük a bb vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i\mathbf{e}_i + \ldots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i}a_1\mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i}a_2\mathbf{e}_2 - \ldots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \ldots - \frac{1}{a_i}a_m\mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + b_i\mathbf{e}_i + \ldots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \ldots + (b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést elemi bázistranszformációnak nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A történtek szemléltetésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i & a_i & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & a_m & b_m \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

4.24. TÉTEL: ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ vektor $E = \{\, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \,\}$ bázisra vonatkozó i-edik koordinátája $a_i \neq 0$. Ekkor az E által generált $\mathcal{E}$ altérnek az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_i + 1, \ldots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges b vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha a_i-t választjuk főelemnek.

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

4.25. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL. Oldjuk meg a 2.14. és a 2.22. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.

MEGOLDÁS. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	$\boxed{1}$	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	-5	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	[illegible]
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	0	[illegible]
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4	$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4	$\mathbf{e}_3$	0	0	$\boxed{3}$	-6	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	[illegible]
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5	$\mathbf{e}_4$	0	$\boxed{1}$	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	[illegible]

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$		y	z	$\mathbf{b}$		z	$\mathbf{b}$		$\mathbf{b}$
1	1	2	0	x	1	2	0	x	3	−5	x	1
2	2	3	2		0	−1	2		−1	2		0
1	3	3	4		2	1	4		3	−6	z	−2
1	2	1	5		1	−1	5	y	−1	5	y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$. ■

Áttérés másik bázisra. Az előző paragrafusokban a bázis cseréjével foglalkoztunk, a standard bázisból áttértünk egy másikra, vagy fordítva. Azt láttuk, hogy ha $\mathbf{B}$ egy $m \times r$-es r rangú mátrix, akkor az oszlopvektorai, mint bázis által kifeszített altér egy $\mathbf{v}$ vektorának e bázisbeli $[\mathbf{v}]_B$ koordinátás alakjából a standard $[\mathbf{v}]_E$ koordinátás alak egy egyszerű mátrixszorzással megkapható, nevezetesen

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{B}_{E\leftarrow B}[\mathbf{v}]_B. \tag{4.6}$$

ahol a $\mathbf{B}$ mátrix indexébe tett $E \leftarrow B$ a $\mathbf{B}$ oszlopvektorainak bázisából a standard bázisra való áttérésre utal. A visszafelé mutató nyíl a képlet könnyebb megjegyezhetőségét segíti.

Például a 4.12. példabeli (4.3) képlet épp erre az összefüggésre példa.

A továbbiakban – egyszerűsítendő a dolgunkat – csak $\mathbb{T}^n$ két bázisának vizsgálatára szorítkozunk. Legyen

$$B = \{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \,\} \text{ és } C = \{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \,\}$$

e tér két bázisa. Írjuk fel ugyanannak a $\mathbf{v}$ vektornak koordinátás alakját mindkét bázisban. Köztük nyilván fönnáll a $[\mathbf{v}]_C = \mathbf{B}_{C\leftarrow B}[\mathbf{v}]_B$ összefüggés, ha a $\mathbf{B}_{C\leftarrow B}$ mátrix oszlopai a B bázis vektorait tartalmazzák a C bázisban fölírva. Ez azért igaz, mert a $[\mathbf{v}]_B$ vektorral való szorzás a $\mathbf{B}_{C\leftarrow B}$ mátrix oszlopainak épp azt a lineáris kombinációját számítja ki, amit keresünk, és mindezt a C bázisban kifejezve.

Például a mellékelt ábrán

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_C, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}_C, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_C.$$

A $\mathbf{B}_{C\leftarrow B} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$ mátrixszal valóban fönnáll a $[\mathbf{v}]_C = \mathbf{B}_{C\leftarrow B}[\mathbf{v}]_B$ összefüggés:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_B.$$

??? ide jön két ábra a mellékelt szöveghez ??

4.1. ábra. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakja két különböző bázisban

4.26. TÉTEL: BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ. Legyen $\mathbb{T}^n$ két bázisa B és C. Egyetlen olyan $n \times n$-es $\mathbf{B}_{C\leftarrow B}$ mátrix létezik, melyet bármely $\mathbf{v}$ vektor B-beli koordinátás alakjával megszorozva a $\mathbf{v}$ vektor C-beli alakját kapjuk, azaz $[\mathbf{v}]_C = \mathbf{B}_{C\leftarrow B}[\mathbf{v}]_B$. E $\mathbf{B}_{C\leftarrow B}$ mátrix oszlopai a B bázis vektorainak C-beli koordinátás alakjai. A C-ről B-re való áttérés mátrixa a B-ről C-re való áttérés mátrixának inverze, azaz $\mathbf{B}_{B\leftarrow C} = \mathbf{B}_{C\leftarrow B}^{-1}$.

BIZONYÍTÁS. ??? ■

4.27. PÉLDA: BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ. Legyen a háromdimenziós térbeli $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bázis vektorainak a V bázisra vonatkozó koordinátás alakja $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)_V$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3)_V$, $\mathbf{u}_3 = (1, 4, 6)_V$. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, 0, 4)_U$ vektor V bázis szerinti, valamint a $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)_V$ vektor U bázis szerinti koordinátás alakját.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} = (2, 0, 4)_U$ vektor V-beli alakja a bázisvektorok V-beli alakjával azonnal felírhatóak:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}_U = 2\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_3 = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_V + 4\begin{bmatrix}1\\4\\6\end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix}6\\18\\26\end{bmatrix}_V.$$

Ugyanezt kapjuk az áttérés mátrixával való szorzás után is:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&6\end{bmatrix}_{V\leftarrow U}\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}_U = \begin{bmatrix}6\\18\\26\end{bmatrix}_V.$$

Az inverz bázistranszformáció mátrixa

$$\mathbf{B}_{U\leftarrow V} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&6\end{bmatrix}_{V\leftarrow U}^{-1} = \begin{bmatrix}0&3&-2\\2&-5&3\\-1&2&-1\end{bmatrix}_{U\leftarrow V}.$$

Ezt fölhasználva

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0&3&-2\\2&-5&3\\-1&2&-1\end{bmatrix}_{U\leftarrow V}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix}4\\-9\\4\end{bmatrix}_U.$$

1• **Példa egy testre.** Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ az összes $a + b\sqrt{2}$ alakú számok halmazát, ahol a és b racionális számok, azaz $a, b \in \mathbb{Q}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ elemei egyúttal valós számok is, így a definíció 2-4. azonosságai fennállnak, elég csak az 1.-et igazolni. Ehhez be kell látni, hogy két $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-beli szám összege és szorzata is $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-beli. Ezt az

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

és az

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

összefüggések igazolják. ■

4.2. Lineáris leképezések

Minden $\boldsymbol{A}$ mátrixhoz tartozik egy $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$ leképezés. Ez azonban nem csak egyszerűen jellemzi a mátrixot, hanem túl is mutat rajta.

A mátrixtranszformáció tulajdonságai. *Mátrixtranszformáción* az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést értjük. Egy $m \times n$-es $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{m\times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^m$.

4.28. PÉLDA: VEKTORI SZORZÁSSAL DEFINIÁLT MÁTRIXTRANSZFORMÁCIÓ. Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Legyen A az a transzformáció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixtranszformáció, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\times\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3)\times(x_1, x_2, x_3) = (a_2x_3-a_3x_2, a_3x_1-a_1x_3, a_1x_2-a_2x_1).$$

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixtranszformáció, hisz $\mathbf{y}$ minden koordinátája $\mathbf{x}$ koordinátáinak lineáris kifejezése. A vektorokat oszlopvektor alakba írjuk, és $\mathbf{x}$ koordinátái szerint rendezzük:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -a_3x_2 & +a_2x_3 \\ a_3x_1 & & -a_1x_3 \\ -a_2x_1 & +a_1x_2 & \end{bmatrix}$$

Innen azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, és fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

E feladatra később még többször visszatérünk. ■

Műveletek mátrixtranszformációk között. A mátrixtranszformációk $\mathbb{T}^n$-ből $\mathbb{T}^m$-be képző függvények, így a köztük lévő műveleteket nem kell definiálni, azokat ismerjük. Az a kérdés, hogy van-e kapcsolat a mátrixműveletek és a mátrixokhoz tartozó transzformációk közti műveletek között! Például ha A és B az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokhoz tartozó transzformáció, azaz $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ és $B : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Bx}$, akkor igaz-e, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-hez az $A + B$ tartozik?

4.29. TÉTEL: MÁTRIXTRANSZFORMÁCIÓK MŰVELETEI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ három $m\times n$-es mátrix, legyen A, B és C a hozzájuk tartozó három mátrixtranszformáció és legyen c egy skalár. Ekkor

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $A + B = C$, és

2) $c\mathbf{A} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $cA = C$.

Ha $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ típusa rendre $m \times k$, $k \times n$, illetve $m \times n$, és X, Y és Z a hozzájuk tartozó három mátrixtranszformáció, akkor

3) $\mathbf{XY} = \mathbf{Z}$ pontosan akkor igaz, ha $X \circ Y = Z$, azaz mátrixok szorzásának a függvények kompozíciója felel meg.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítások a mátrixműveletek tulajdonságaiból következnek. Ott, ahol valamelyik mátrixazonosságot használjuk, az egyenlőség fölé egy M-betűt írunk, ahol pedig a függvények közti műveletek definícióit használjuk, ott egy F-betűt:

1) $(A+B)\mathbf{x} \overset{F}{=} A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} \overset{M}{=} (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} = C\mathbf{x}$.

2) $(cA)\mathbf{x} \overset{F}{=} c(A\mathbf{x}) = c(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (x\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} = C\mathbf{x}$.

3) $(X \circ Y)\mathbf{x} = X(Y\mathbf{x}) = X(\mathbf{Y}\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}\mathbf{x}) \overset{M}{=} (\mathbf{X}\mathbf{Y})\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{x} = Z\mathbf{x}$. ∎

Az $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ függvénynek a $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ függvény inverze, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$ helyen $(f(g(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ és $(g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, azaz ha kompozícióik az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények megegyeznek az identikus leképezéssel.

4.30. Állítás: Inverz mátrixtranszformációk. Ha az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix inverze $\mathbf{B}$, akkor e két mátrixhoz rendelt $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ és $B : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ lineáris transzformációk inverz leképezések.

Bizonyítás. Az állítást igazolja, hogy

$$A(B(\mathbf{x})) = A(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x},$$

és

$$B(A(\mathbf{x})) = B(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Mátrixtranszformációk tulajdonságai. Ez a paragrafus arra az igen fontos tényre épül, hogy a mátrixtranszformációk megőrzik a lineáris kombinációkat, azaz egy lineáris kombináció transzformáltja a vektorok transzformáltjainak azonos lineáris kombinációjával egyenlő.

4.31. Tétel: A lineáris kombinációt megőrző $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ leképezések. Legyen $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ egy tetszőleges leképezés. A következő három állítás ekvivalens.

(a) Létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A leképezés megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel, azaz A mátrixtranszformáció.

(b) Az A leképezés homogén és additív, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^n$ vektorokra és $c \in \mathbb{T}$ skalárra

1. $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$ (A homogén),
2. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ (A additív).

(c) Az A leképezés megőrzi a lineáris kombinációkat, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^n$ vektorokra és $c, d \in \mathbb{T}$ skalárokra $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$.

Bizonyítás. *(a)* $\Rightarrow$ *(b)*: Ha van olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, akkor

$$A(c\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} = cA\mathbf{x}, \text{ és}$$
$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}.$$

(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Ha A homogén és additív, akkor

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = A(c\mathbf{x}) + A(d\mathbf{y}) = cA\mathbf{x} + dA\mathbf{y},$$

ahol az első egyenlőségnél az A additivitását, a másodiknál a homogenitását használtuk.

(c) $\Rightarrow$ *(a)*: Tekintsük $\mathbb{T}^n$ standard bázisát és az $A\mathbf{e}_i$ vektorokból képzett $\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\dots|A\mathbf{e}_n]$ mátrixot, valamint legyen az $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha A olyan leképezés, mely megőrzi a lineáris kombinációkat, akkor

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Tehát valóban létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ráadásul ilyen mátrix csak ez az egy van, mert bármely $\mathbf{e}_i$ bázisvektorra és bármely $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_{*i}$, tehát az $\mathbf{A}_{*i}$ oszlopvektor csak $A\mathbf{e}_i$ lehet. ■

Megjegyzések:

▶ A *(c)* pont csak két vektor lineáris kombinációjáról szól, de ebből indukcióval adódik bármely lineáris kombinációra is az állítás. Ezt a bizonyításban ki is használtuk.

▶ Az A leképezés $\mathbf{x}$ vektoron való hatásának eredményére az $A(\mathbf{x})$ és az $A\mathbf{x}$ jelölés is használatos.

▶ E tétel *(b)* és *(c)* pontja lehetővé teszi a mátrixtranszformáció általánosítását. Ezt tesszük a következő definícióban.

4.32. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS LEKÉPEZÉS. Legyen V, V_1 és V_2 mindegyike olyan halmaz, melyen értelmezve van egy összeadás és egy $\mathbb{T}$-beli skalárral való szorzás művelet. Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés *lineáris*, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemekre és $c \in \mathbb{T}$ skalárra $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$, és $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$. Az $A : H \to H$ lineáris leképezéseket *lineáris transzformációnak* is nevezzük.

4.33. PÉLDA: A DERIVÁLÁS ÉS INTEGRÁLÁS LINEÁRIS LEKÉPEZÉS. Legyen H_1 az összes $\mathbb{R}$-en értelmezett és ott differenciálható függvény halmaza, H_2 pedig az összes $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény halmaza. A $D : H_1 \to H_2 : f \mapsto Df = f'$ leképezés lineáris, ugyanis minden $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cDf, \text{ és } D(f+g) = (f+g)' = f'+g' = Df + Dg.$$

Hasonló összefüggések állnak fönn az integrálokra is, például legyen H_1 a $[0, 1]$ intervallumon Remann-integrálható függvények halmaza, és legyen $H_2 = \mathbb{R}$. Ekkor az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

$$\int_0^1 cf = c\int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$

4.34. PÉLDA: SÍKBELI FORGATÁS, TÜKRÖZÉS, VETÍTÉS. Mutassuk meg, hogy a síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

MEGOLDÁS. A síkbeli vektorok pont körüli forgatása lineáris leképezés. Könnyen belátható, hogy egy tetszőleges O pont körül α szöggel elforgatva egy $\mathbf{v}$ vektort reprezentáló irányított szakaszokat, azok mind ugyanannak a $\mathbf{w}$ vektornak lesznek a reprezentánsai. Ezt a vektort tekintjük a $\mathbf{v}$ vektor elforgatottjának. Ugyancsak könnyen látható, hogy egy vektor c-szeresének ($c \in \mathbb{R}$) elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának c-szeresével, valamint hogy két vektor összegének elforgatottja megegyezik a vektorok elforgatottjainak összegével.

Hasonlóan egyszerűen látszik, hogy egy egyenesre való tükrözés egy vektor c-szeresét a vektor tükörképének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor tükörképének összegébe.

Végezetül ugyanígy megmutatható, hogy egy egyenesre való merőleges vetítés egy vektor c-szeresét a vektor vetületének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor vetületének összegébe. ■

??? ide jön az elforgatottról a rajz

4.2. ábra. A pont körüli elforgatás lineáris leképezés

??? ide jön az tükrözésről a rajz

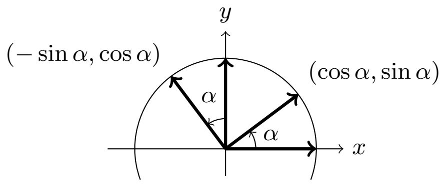
4.3. ábra. Az egyenesre való tükrözés lineáris leképezés

??? ide jön az tükrözésről a rajz

4.4. ábra. Az egyenesre való merőleges vetítés lineáris leképezés

Lineáris leképezések mátrixa. A 4.31. tétel bizonyításában megkonstruáltuk egy lineáris $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ leképezéshez azt a mátrixot, mely ezt a leképezést generálja, nevezetesen bizonyítottuk, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra

$$A\mathbf{x} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_1|\dots|A\mathbf{e}_n]\,\mathbf{x}.$$



4.5. ábra. Az **i** és **j** vektorok α szöggel való elforgatottjai

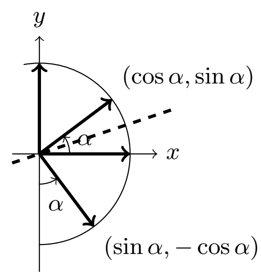
4.35. PÉLDA: A FORGATÁS MÁTRIXA. Írjuk fel a sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixát!

MEGOLDÁS. A 4.34. példa szerint a forgatás lineáris leképezés, így van mátrixa, melynek alakja $[A\mathbf{i}\ A\mathbf{j}]$, ahol **i** és **j** jelöli az $\mathbb{R}^2$ standard bázisának elemeit.

Az $A\mathbf{i}$ vektor megegyezik **i** elforgatottjával, ami könnyen meghatározható, ha az origó körül forgatunk. $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\right]$. A **j** vektor α szöggel való elforgatottja megegyezik az $A\mathbf{i}$ vektor $\pi/2$ szöggel való elforgatottjával, azaz $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$. Így az A-hoz tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}A\mathbf{i} & A\mathbf{j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

Tehát bármely **x** vektor α szöggel való elforgatottja $\mathbf{Ax} = \left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$. ■

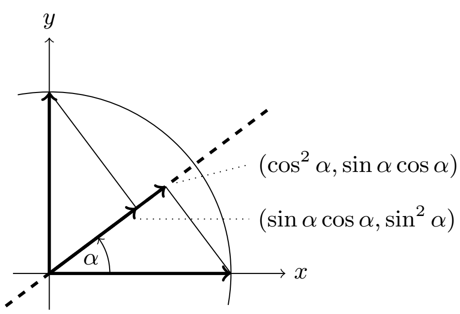


4.6. ábra. Az **i** és **j** vektorok egy egyenesre való tükörképe

4.36. PÉLDA: TÜKRÖZÉS MÁTRIXA. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a sík vektorait egy egyenesre tükrözi!

MEGOLDÁS. a 4.34. példa szerint a tükrözés lineáris leképezés. A vektorok tükörképe csak a tükrözés tengelyének állásától, például az első koordinátatengellyel bezárt szögétől függ. Legyen ez a szög $\alpha/2$. Az **i** és a **j** vektorok képét könnyen megkapjuk, ha a tükrözés tengelye átmegy az origón.

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy **i** tükörképe $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\right]$, míg a **j** vektoré $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$. Így a sík vektorait az első tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző leképezés mátrixa $\left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$. ■



4.7. ábra. Az **i** és **j** vektorok merőleges vetülete

4.37. PÉLDA: MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA. Írjuk fel a sík vektorait egy egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixát!

MEGOLDÁS. Két megoldást is adunk.

Első megoldás: a 4.34. példa szerint a merőleges vetítés lineáris leképezés. Az előző példához hasonlóan elég egy origón átmenő egyenest vizsgálni.

A bizonyítás leolvasható a mellékelt ábráról, hisz az ott látható két derékszögű háromszög befogóinak hossza $\cos\alpha$, illetve $\sin\alpha$, és így például a $\cos\alpha$ hosszú szakasz két tengelyvetülete $\cos^2\alpha$ és $\cos\alpha\sin\alpha$ hosszú, tehát **i** képe $\left[\begin{smallmatrix}\cos^2\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha\end{smallmatrix}\right]$

$$\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

Második megoldás: Az 1.18. tétel szerint ha **a** és **b** a sík két vektora, és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor **a**-nak a $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix}b_1\\ b_2\end{smallmatrix}\right]$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

Eszerint **i** és **j** vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2+b_2^2}\begin{bmatrix}b_1^2\\ b_1b_2\end{bmatrix} \text{ és } \operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2+b_2^2}\begin{bmatrix}b_1b_2\\ b_2^2\end{bmatrix}.$$

E két vektor egymás mellé írásával kapott mátrix

$$\frac{1}{b_1^2+b_2^2}\begin{bmatrix}b_1^2 & b_1b_2\\ b_1b_2 & b_2^2\end{bmatrix}.$$

A két eredmény megegyezik, azaz

$$\frac{1}{b_1^2+b_2^2}\begin{bmatrix}b_1^2 & b_1b_2\\ b_1b_2 & b_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}.$$

ugyanis ha a **b** vektor x-tengellyel bezárt szöge α, akkor $\cos\alpha = b_1/\sqrt{b_1^2+b_2^2}$, és $\sin\alpha = b_2/\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. ■

???

4.3. Determináns

Egy valós négyzetes mátrix sorvektorai által kifeszített parallelepipedon térfogata jó jellemezője lehet a mátrixnak. Ehhez közel áll a determináns fogalma, mely egy négyzetes mátrixokon értelmezett skalárértékű függvény. E skalár könnyen kiszámolható az elemi sorműveletekkel. A determináns fontos tulajdonságainak egyike, hogy pontosan akkor nulla, ha sorvektorai lineárisan összefüggők.

A determináns a mátrix egy igen fontos, és sokhelyütt használt jellemzője. Fogalmát egy egyszerű és szemléletes fogalom, a parallelepipedon előjeles térfogatának segítségével fogjuk bevezetni.

Parallelogramma előjeles területe. A 4.39. példában láttuk, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad - bc|$, és hogy $ad-bc$ pontosan akkor pozitív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak. Ez vezet a következő definícióhoz:

4.38. DEFINÍCIÓ: PARALLELOGRAMMA ELŐJELES (VAGY IRÁNYÍTOTT) TERÜLETE. Két síkbeli vektor által kifeszített parallelogramma *előjeles területén* a területét értjük, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1-szeresét, ha a két vektor balrendszert alkot.

Az előzőek szerint az $\mathbf{u} = (a, b)$ és a $\mathbf{v} = (c, d)$ vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe $ad - bc$. Az előjeles terület tehát egy vektorpárokon értelmezett valós értékű függvény – jelölje most f –, mely eleget tesz a következő tulajdonságoknak.

1. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Ez nyilvánvaló, hisz a két vektor sorrendjét megcserélve megváltozik a parallelogramma irányítása.

2. $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, ugyanis az elfajuló parallelogramma területe 0.

3. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, azaz f homogén mindkét változójában. Ez igaz, mert egy parallelogramma egyik oldalának c-szeresére növelése c-szerezi a területét is.

4. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ és $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v})$, azaz f additív mindkét változójában. Az állítás igaz volta leolvasható a **??**. ábráról.

5. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$, azaz az $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sorvektorai által kifeszített parallelogramma területe megegyezik a hozzáadás sorművelete után kapott mátrix sorvektoraihoz tartozó területtel.

6. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$, azaz a standard bázis által kifeszített egységnégyzet területe 1.

Az állítások a fenti ábrákkal szemléltetett egyszerű geometriai érvelések mellett az $f((a, b), (c, d)) = ad - bc$ formulával is bizonyíthatóak. E tulajdonságok segítségével általánosítani lehet az előjeles terület fogalmát, és bevezetni az előjeles térfogat fogalmát az n-dimenziós valós tér parallelepipedonjaira.

4.39. PÉLDA: HÁNYSZOROSÁRA NAGYÍT EGY LINEÁRIS LEKÉPEZÉS?. Az $\left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ mátrixszal reprezentált lineáris leképezés egy T területű síkidomot mekkora területűbe visz?

laprendszerek területeinek infimuma. Hasonlóan, a T-be írt közös belső pont nélküli téglalaprendszerek területeinek szuprémumát T belső Jordan-mértékének nevezzük. *T Jordan-mérhető*, ha belső és külső Jordan-mértéke megegyezik, és e közös érték *T Jordan-mértéke*.
A *Lebesgue-mérték* definiálásához olyan fedő téglalaprendszereket veszünk, melyek megszámlálható (tehát akár végtelen) elemszámúak, és ezekhez a téglalapjaik területösszegét rendeljük. A T halmazt fedő összes téglalaprendszerhez ilyen módon rendelt számok infimumát a T külső mértékének nevezzük és $\lambda^*(T)$-vel jelöljük. A T-t *Lebesgue-mérhetőnek nevezzük*, ha bármely síkbeli H halmazra

$$\lambda^*(H) = \lambda^*(H \cap T) + \lambda^*(H \setminus T).$$

Egy Jordan-mérhető T tartomány Lebesgue-mérhető is, és e két mérték ekkor megegyezik. Viszont például az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmaza nem Jordan-mérhető, mert belső mértéke 0, külső mértéke 1, viszont Lebesgue-mérhető, mértéke 0.

Megoldás. Nem nyilvánvaló, hogy a kérdésre van-e egyáltalán válasz, és nem fordulhat-e elő, hogy a fenti leképezés egyik síkidomot például a 2-szeresébe, másikat a 3-szorosába viszi.

Akár a területmérték Jordan-, akár Lebesgue-féle definícióját tekintjük, elég a kérdést olyan téglalapokra megválaszolni, amelyek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel (lásd a széljegyzetet). Legyen egy ilyen téglalap négy csúcsa: (p,q), $(p+x,q)$, $(p,q+y)$, $(p+x,q+y)$, ahol $x,y>0$. Tehát a téglalap oldalhossza x és y, területe xy. A csúcsok képe kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott parallelogramma oldalvektorai (ax,cx) és (by,dy), és így területe

$$|(ax)(dy)-(cx)(by)| = |ad-bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe a téglalap területének $|ad-bc|$-szerese, s így minden területmértékkel rendelkező síkbeli tartomány képének területe az eredeti $|ad-bc|$-szerese.

Gondoljuk meg, mi a különbség T két képe közt az $ad-bc>0$, és a $ad-bc<0$ esetben? ■

Parallelepipedon előjeles térfogata. A vegyes szorzat tárgyalásakor láttuk, hogy a valós háromdimenziós térben három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata lesz, előjele pedig aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb- vagy balrendszert alkot. A háromdimenziós tér parallelepipedonjaira a parallelogrammához hasonló tulajdonságok igazolhatók.

1. Bármely két argumentum felcserélése megváltoztatja a függvényérték előjelét, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u})$.
2. Ha f bármely két argumentuma megegyezik, a függvényérték 0, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0$.
3. f homogén mindhárom argumentumában, pl. $f(c\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.
4. f additív mindhárom argumentumában, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})+f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}+\ zz)$.
5. f bármely argumentumához hozzáadva egy másik konstansszorosát, a függvényérték nem változik, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{w})$.
6. $f(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) = 1$, azaz az egységkocka térfogata 1.

A háromdimenziós parallelepipedon térfogatát úgy számoltuk ki, hogy két vektor által kifeszített parallelogramma területét szoroztuk a harmadik vektor csúcsának a parallelogramma síkjától való távolságával. Ha pedig a parallelogramma irányítását is figyelembe vettük, e távolság előjeles távolsággá vált, hisz az ott használt skaláris szorzat a sík egyik oldalán pozitív, másik oldalán negatív eredményt ad. Ugyanez az eljárás megismételhető magasabb dimenzióban is. Például, ha a négydimenziós tér egy parallelepipedonjának előjeles térfogatát akarjuk kiszámolni, akkor egy háromdimenziós parallelepipedon térfogatát szorozzuk a negyedik vektor végpontjának a másik három terétől való előjeles távolságával. Ezután bebizonyíthatnánk, hogy az így definiált előjeles térfogat is rendelkezik a korábban felsorolt tulajdonságok négydimenziós megfelelőivel. E helyett egy más, egyszerűbb és szebb utat választunk.

A determináns definíciója. A parallelepipedon fogalma helyett – mely nem értelmezhető bármely számtest esetén – egyszerűen csak az azt kifeszítő vektorokat, illetve az azokból képzett mátrixot fogjuk használni. Az előjeles térfogat helyett olyan fogalmat fogunk definiálni, mely speciális esetként ezt is tartalmazza. Ez lesz a determináns. A definícióban csak az előjeles térfogat vizsgálatában megismert függvénytulajdonságokat használjuk, azok közül is csak annyit, amennyi már egyértelműen definiálja azt.

4.40. DEFINÍCIÓ: DETERMINÁNS. A *determináns* a négyzetes mátrixokon értelmezett és det-tel jelölt olyan skalár értékű függvény, mely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:
D1. lineáris a mátrix minden sorára nézve,
D2. két azonos sort tartalmazó mátrixhoz 0-t,
D3. az egységmátrixhoz 1-et rendel.
Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ mátrix determinánsát $\det(\mathbf{A})$, $|\mathbf{A}|$ vagy $|a_{ij}|_n$ jelöli.

► Az $n\times n$-es mátrixok determinánsát szokás n-*edrendű* determinánsnak is nevezni.

► Részletezve az általános jelölést az $\mathbf{A}$ mátrixra és determinánsára:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

E jelölésnek megfelelően a $\det(\mathbf{A})$ determináns sorain, oszlopain, elemein az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, oszlopait, elemeit értjük.

► Részletezzük a definíció három feltételét. A determináns lineáris a mátrix minden sorában, tehát bármely c és d skalárra és bármely i-re, ahol $1 \le i \le n$

$$c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}''_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ c\mathbf{a}'_{i*} + d\mathbf{a}''_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix}.$$

Azonos sorok esetén a determináns értéke 0, azaz ha valamely $i \ne j$ esetén $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{a}_{j*} = \mathbf{b}$, akkor

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Végül az egységmátrix determinánsa 1, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

► Az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsa $\det([a]) = a$, ugyanis a determináns definíciója szerint $\det([1]) = 1$, és $\det([a]) = \det([a\cdot 1]) = a\det([1]) = a$. Ez a függvény pedig additív is, így a definíció minden feltételét kielégíti. A jelölésbeli zavarok elkerülésére az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsára csak a $\det([a])$ vagy $\det(a)$ jelölést használjuk, mert $|a|$ az a abszolút értékét jelöli!

► Az előző paragrafus alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

► Láttunk determinánst, például a 2×2-es mátrixokét. Azt azonban még nem tudjuk, hogy létezik-e minden n-re és egyértelmű-e. A definíció alapján ez bizonyítható. A bizonyítást későbbre hagyjuk, addig feltételezzük, hogy létezik és egyértelmű.
► A determináns tekinthető olyan n-változós függvénynek, melynek n argumentumába a mátrix n sorvektora kerül. Nem okoz félreértést, ha ezt a függvényt is det jelöli. Ha tehát $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \ldots, \mathbf{a}_{n*}$, akkor $\det(\mathbf{A})$ megegyezik a $\det(\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \ldots, \mathbf{a}_{n*})$ függvényértékkel. Például a 3×3-as egységmátrix determinánsa az alábbi alakokba írható:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det([1\ 0\ 0],\ [0\ 1\ 0],\ [0\ 0\ 1]) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

ahol $\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a standard egységvektorokat jelöli. A determináns fenti definíciója könnyen fölírható e jelöléssel is (ld. 4.3.1. feladat).

A determináns értékének kiszámítása. A determináns kiszámításához az elemi sorműveleteket fogjuk használni. Két kérdésre kell válaszolnunk: (1) hogyan változik a determináns értéke elemi sorműveletek közben, (2) mennyi a determinánsa a lépcsős alakra hozott mátrixoknak?

4.41. ÁLLÍTÁS: A DETERMINÁNS EGYIK SORA NULLVEKTOR. Egy determináns értéke 0, ha valamely sorában minden elem 0.

BIZONYÍTÁS. Ha egy determináns egy 0-sorát bármely c számmal beszorozzuk, az 0-sor marad, így értéke nem változik, másrészt a c-vel való szorzás miatt c-szeresére módosul. Mivel csak a 0 egyezik meg tetszőleges c-re saját c-szeresével, így a determináns értéke csak 0 lehet. ■

4.42. TÉTEL: DETERMINÁNS ÉS AZ ELEMI SORMŰVELETEK. Az elemi sorműveletek eredményeként a determináns értéke az alábbiak szerint változik:

1. *sorcsere* közben előjelet vált;
2. a c skalárral való *beszorzás* után értéke c-szeresére változik;
3. egy sor konstansszorosának egy másikhoz való *hozzáadása* után értéke nem változik.

BIZONYÍTÁS. Az első állítás igazolásához a determináns definíciójának első két pontját használjuk (*D1*, *D2*). Csak az i-edik és j-edik sorokat változtatjuk ($i<j$):

$$\begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} \overset{D2}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} \overset{D1}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix}$$

$$\overset{D2}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} \overset{D1}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ -\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix}$$

$$\overset{D2}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}+\mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ -\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vdots\\ -\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ -\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} \overset{D1}{=} \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ -\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} \overset{D2}{=} - \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix}$$

A tétel második pontja definíció szerint igaz, marad a harmadik.

$$\begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}+c\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ c\mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vdots\\ \mathbf{a}_{i*}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{j*}\\ \vdots\end{vmatrix}.$$

Az elemi mátrixok egyetlen sorművelettel kaphatók az egységmátrixból, így ezek determinánsa könnyen számolható. Hasonlóan könnyen számolható egy elemi mátrix és egy tetszőleges mátrix szorzatának determinánsa.

4.43. KÖVETKEZMÉNY: ELEMI MÁTRIXOK DETERMINÁNSA.
(a) A hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa 1, a sorcseréével kapotté -1, egy sor c-vel való sorzásával kapotté c, azaz képlettel

$$\det(\mathbf{E}_{S_i+cS_j})=1,\quad \det(\mathbf{E}_{S_i\leftrightarrow S_j})=-1,\quad \det(\mathbf{E}_{cS_i})=c.$$

(b) Egy $\mathbf{E}$ elemi mátrix és egy tetszőleges négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix szorzatának determinánsa megegyezik determinánsaik szorzatával, azaz

$$\det(\mathbf{EA})=\det(\mathbf{E})\det(\mathbf{A}).$$

BIZONYÍTÁS. Az *(a)* állítás abból következik, hogy az elemi mátrixok az 1 determinánsú egységmátrixból kaphatók egyetlen sorművelettel. Hasonlóképp adódik *(b)* abból, hogy az $\mathbf{EA}$ egyetlen sorművelettel kapható $\mathbf{A}$-ból. ■

Például:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&4&0&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{vmatrix}=3.$$

4.44. példa: Permutációs mátrix determinánsa. Mivel a permutációs mátrix csak elemi sorcserékkel megkapható az egységmátrixból, és a sorcsere megváltoztatja a determináns előjelét, ezért permutációs mátrix determinánsa mindig 1 vagy -1. Például az első determináns két sorcserével, a második három sorcserével kapható meg:

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=1,\qquad \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}=-1.$$

4.45. tétel: Háromszögmátrix determinánsa. Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

Bizonyítás. Ha egy háromszögmátrix főátlójában van 0, akkor a főelemek száma kevesebb lesz, mint a sorok száma, azaz a mátrixban van egy zérussor, így determinánsának értéke 0. Ha nincs 0-elem a főátlóban, mind az alsó, mind a felső háromszögmátrix csak a hozzáadás sorműveletével – azaz a determináns értékének megváltoztatása nélkül – diagonálissá alakítható a főátlón kívüli elemek kiküszöbölésével, azaz

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\?&a_{22}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\?&?&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&?&\dots&?\\0&a_{22}&\dots&?\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

Egy diagonális mátrix determinánsában minden sorból kiemelve a főátlóban szereplő számot kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\begin{vmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

tehát a determináns értéke valóban a főátlóbeli elemek szorzata. ■

4.46. példa: Háromszögmátrix determinánsa. Az alábbi determináns értéke egyetlen sorcsere után azonnal leolvasható:

$$\begin{vmatrix}3&0&0&0&0\\3&0&0&2&0\\3&0&2&0&0\\3&2&0&0&0\\3&3&3&3&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&0&0&0&0\\3&2&0&0&0\\3&0&2&0&0\\3&0&0&2&0\\3&3&3&3&3\end{vmatrix}=-3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=-72$$

4.47. példa: Determináns kiszámítása lépcsős alakra hozással. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix}2&2&-3\\2&2&-4\\4&5&-6\end{vmatrix}\quad\text{és a}\quad\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$$

determinánsok értékét lépcsős alakra hozással.

Megoldás. Elemi sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix}2&2&-3\\2&2&-4\\4&5&-6\end{vmatrix}\overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-2S_1}}{=}\begin{vmatrix}2&2&-3\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}\overset{S_2\leftrightarrow S_3}{=}-\begin{vmatrix}2&2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2.$$

A következő determinánsnál sorcsere nélkül eliminálhatók a főátló alatti elemek, ezért a sorműveleteket nem is jelezzük.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&5&9\\0&3&9&19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&3&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

(Egy érdekes észrevétel: a fenti determinánsban és sorlécsős alakjában is a Pascal-háromszög számai találhatók.) ∎

Mátrixműveletek és determináns. Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mátrixműveletek és a determináns között. Fontos megjegyezni, hogy a determinánsfüggvénynek *nincs* a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra nézve művelettartó tulajdonsága, azaz általában $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, és $\det(c\mathbf{A}) \neq c\det(\mathbf{A})$. A determináns definíciója szerint ilyen tulajdonsága csak a sorvektorokra vonatkozóan van.

A skalárral való szorzás esetén viszont itt is mondható valami: mivel egy mátrix c-szeresének determinánsa minden sorából kiemelhető c, ez annyi kiemelést jelent, ahány sora van a mátrixnak. Így tetszőleges $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. Ez világos, ha $\mathbb{R}^2$- vagy $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra gondolunk, hisz például egy parallelogramma előjeles területe 4-szeresére, egy parallelepipedon előjeles térfogata 8-szorosára nő, ha minden élét 2-szeresére növeljük.

A determináns művelettartó a négyzetes mátrixok szorzására nézve. Ezt mondja ki a következő állítás.

4.48. Állítás: Determinánsok szorzásszabálya. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor $\mathbf{AB}$ is, azaz ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB})$ is 0, tehát $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$. Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor felbontható elemi mátrixok szorzatára: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$. A ??? állítás szerint tetszőleges $\mathbf{E}$ elemi mátrixra $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$. Ezt az összefüggést $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k$-re és $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$-re is használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B})\\ &= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\det(\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \dots =\\ &= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\dots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}),\ \text{másrészt}\\ \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B})\\ &= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\det(\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}) = \dots =\\ &= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\dots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}),\end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. Egy másik, nagyon szép bizonyítás található a 4.3.3. feladatban. ∎

Mátrix determinánsa és transzponáltjának determinánsa megegyezik. Ez lehetővé teszi, hogy a determináns kiszámításához nem csak az elemi sor-, de az elemi oszlopműveleteket is használjuk, hisz egy mátrixon végzett oszlopművelet a transzponált sorművelete.

4.49. Állítás: Transzponált determinánsa. Mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával, azaz bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Bizonyítás. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásának mátrixszorzatos alakja legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{R}$, ahol $\mathbf{E}_i$ elemi mátrix, $\mathbf{R}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja. A transzponált determinánsa

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{R}^T\mathbf{E}_k^T\dots\mathbf{E}_2^T\mathbf{E}_1^T| = |\mathbf{R}^T||\mathbf{E}_k^T|\dots|\mathbf{E}_2^T||\mathbf{E}_1^T|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden elemi mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával (ellenőrizzük!). Mivel $\mathbf{R}$ redukált lépcsős alak, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, vagy $\mathbf{R}$-nek van egy zérus sora. Ha $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor $|\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{I}| = 1$, ha pedig $\mathbf{R}$-nek van zérus sora, akkor $\mathbf{R}^T$-nak zérus oszlopa, és egy ilyen mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá, tehát determinánsa 0. Azaz $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T|$ ekkor is fönnáll. Ekkor pedig

$$\begin{aligned}&|\mathbf{R}^T||\mathbf{E}_k^T|\dots|\mathbf{E}_2^T||\mathbf{E}_1^T| = |\mathbf{R}||\mathbf{E}_k|\dots|\mathbf{E}_2||\mathbf{E}_1| = \\ &|\mathbf{E}_1||\mathbf{E}_2|\dots|\mathbf{E}_k||\mathbf{R}| = |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{R}| = |\mathbf{A}|.\end{aligned}$$

Tehát $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$. ■

4.50. példa: Determináns kiszámítása elemi oszlopműveletekkel. Az alábbi determinánst elemi sor- és oszlopműveletek alkalmazásával 2 lépésben is kiszámíthatjuk:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\2&2&1&3&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{S_2-S_5}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{O_4-O_1}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{vmatrix} = 1$$

Amikor a determináns értéke 0. Sok kérdésben vízválasztó, hogy a determináns értéke zérus-e. A 4.41. állításban láttuk, hogy a determináns 0, ha van két azonos sora, vagy egy zérussora. Most szükséges és elégséges feltételeket adunk.

4.51. tétel: Zérus értékű determináns. Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. A következő állítások ekvivalensek:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők.
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

Bizonyítás. A ??? tételben láttuk, hogy négyzetes mátrix sorvektorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha a mátrix szinguláris, azaz ha a lépcsős alakra hozás során keletkezik egy 0-sor, ez pedig azzal ekvivalens, hogy a determináns értéke 0. Az utolsó állítás ekvivalenciája a mátrix invertálhatóságáról szóló 3.53. tétel közvetlen következménye. ■

4.52. példa: Zérus értékű determinánsok. Az alábbi determinánsok értéke 0, mert soraik lineárisan összefüggőek.

$$\begin{vmatrix}5&6&8\\2&1&2\\3&5&6\end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&3&5&7\\2&2&4&6\end{vmatrix} = 0.$$

Az első determináns első sora a második és a harmadik összege, a második determináns negyedik sora az első és a harmadik összegének és a másodiknak a különbsége, tehát mindkét determináns értéke 0. (Az ilyen összefüggéseket nem kell „ránézésre észrevenni”, az elemi sorműveletek gyorsan megmutatják.)

Az előző tétel, valamit a 3.53. tétel fontos következménye a determinánsnak az egyenletrendszerek megoldhatóságával való kapcsolatáról szól:

4.53. tétel: Egyenletrendszer megoldhatósága és a determináns zérus volta. Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható,
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

A gyakorlatban – például mért adatok esetén – az, hogy egy determináns nulla-e, nehezen dönthető el! Fontos tudni, hogy az, hogy a determináns értéke közel, vagy távol van a nullától, nem jelenti azt, hogy a determináns közel szinguláris, vagy távolról sem az. Például az

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

determinánsok közül az első értéke tetszőlegesen nagy n-re is 1, pedig $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, és az $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right]$ mátrix már szinguláris. A második determináns $\frac{1}{2}\mathbf{I}_n$ determinánsa, ami nem szinguláris, pedig értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, igaz, csak elegendően nagy n esetén.

A determináns minden sorában (sorvektorában) lineáris leképezés, ami lehetővé teszi a determináns előállítását determinánsok lineáris kombinációjaként. Két ilyen módszert ismertetünk a következő két paragrafusban. Ezek igen fontosak, gyakran ezek segítségével definiálják a determináns fogalmát.

Kígyók determinánsa. A 2×2-es determináns kiszámítására ismerjük azt a formulát, amely a determináns értékét a determináns elemeinek függvényében írja fel: $\det\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = ad - bc$. Hasonló formulát keresünk tetszőleges n-edrendű determinánsokra. Ehhez a kígyókat használjuk

Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrix sorainak permutációjával, azaz minden $\mathbf{K}$ kígyó felírható $\mathbf{K} = \mathbf{P}\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ egy permutációs mátrix (ezt a kígyóhoz tartozó permutációs mátrixnak fogjuk nevezni). Mivel $\mathbf{P}$ determinánsa 1 vagy -1, ezért $|\mathbf{K}| = a_1 a_2 \dots a_n$ vagy $|\mathbf{K}| = -a_1 a_2 \dots a_n$.

A determinánsok soronkénti linearitását használva érdekes felbontását kapjuk a determinánsnak. Tekintsük példaként az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

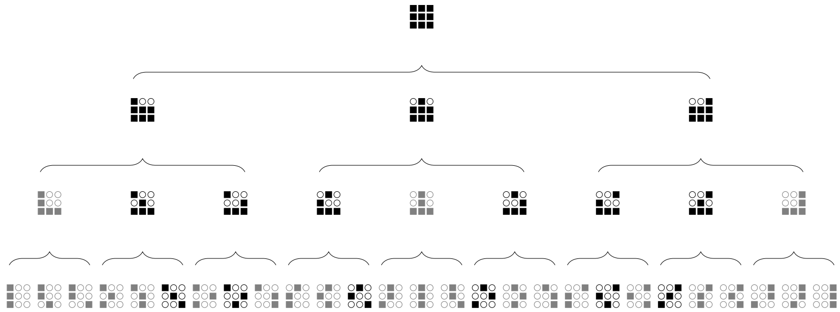
determinánst. Első sorvektorának

$$(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

felbontását fölhasználva bontsuk fel a determinánst három determináns összegére:

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ezután folytassuk e felbontást a második sorvektorral, így már az eredeti determinánst 9 determináns összegére bontottuk. Végül tegyük ugyanezt az utolsó sorral is. Az így kapott 27 determinánst nem írjuk föl, de szemléltetésül egy sematikus ábrán megmutatjuk a felbontás lépéseit. Tömör négyzet jelöli azokat a helyeket, ahol megtartjuk a determináns eredeti elemeit, üres kör azokat, ahová zérust írunk. A 27 determináns mindegyikének minden sorában egy elem az eredeti determinánsból való, a többi zérus. Közöttük azonban csak 6 kígyó van. A többinek van zérus oszlopa, így azok értéke 0, vagyis az eredeti determinánst 6 kígyó összegére bontottuk (a 0 értékű determinánsokat szürke színnel jeleztük).



Hasonló módon bármely n-edrendű determináns fölbomlik n^n olyan determináns összegére, melynek minden sorában egyetlen elem az eredeti determinánsból való, a többi 0, de ezek közül csak azok lesznek kígyók determinánsai, melyek minden oszlopában is van egy elem az eredetiből. (Ezeket nevezzük a mátrixból/determinánsból kiválasztható kígyóknak.) Ezek száma $n!$, mert az első sorból n-féleképp választhatunk egy elemet, a második sorból minden esetben már csak $n-1$-féleképp,..., és ez összesen $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ eset. Igaz tehát a következő állítás:

4.54. Állítás: Determináns, mint kígyók determinánsainak összege. Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Ha az a_{1j_1}, $a_{2j_2}, \dots$, a_{nj_n} elemeket tartalmazó kígyóhoz tartozó permutációs mátrix determinánsát $d_{j_1j_2\dots j_n}$ jelöli (ennek értéke $+1$ vagy -1), akkor

$$|a_{ij}| = \sum d_{j_1j_2\dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

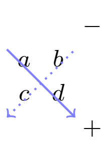
ahol az összegzés végigfut az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján.

Az $n!$ az n növekedtével rendkívül gyorsan nő (pl. $10! = 3628800$), determináns ilyen módon való számítása viszonylag kis rend esetén már számítógéppel sem lehetséges emberi idő alatt. E felbontást a determinánsok tulajdonságainak vizsgálatában használjuk. Számításhoz csak az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben használjuk, igaz, azokra gyakran. $n = 2$ esetén az előző állítás szerint

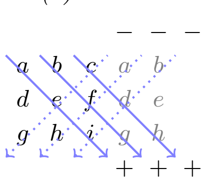
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc,$$

mivel a második determináns egyetlen sorcserével hozható diagonális alakra. $n = 3$ esetén – felhasználva a fenti ábrát is – kapjuk, hogy

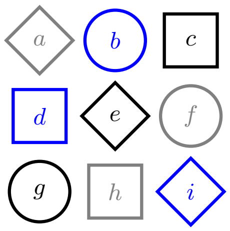
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\
&= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg
\end{aligned}$$



(a) $ad - bc$



(b) $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$



4.9. ábra. A harmadrendű determináns kiszámítására egy – IQ-tesztek típuskérdésére emlékeztető – másik módszer: az egyforma alakúak szorzatának összegéből ki kell vonni az egyforma színűek szorzatait.

E két formula könnyen megjegyezhető egy egyszerű szabállyal, amelyet az $n = 3$ esetben *Sarrus-szabálynak* is neveznek: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. (Hogy mit értsünk főátló és mellékátló irányú szorzaton, a mellékelt ábrákról megérthető.) Fontos, hogy hasonló szabály $n > 3$ esetén már nem érvényes (ld. a 4.3.5. feladatot).

Permutációs mátrix determinánsa*. Kígyó determinánsának kiszámításában egyetlen bizonytalan pont maradt, a hozzá tartozó permutációs mátrix értékének kiszámítása. Kérdés, nem fordulhat-e elő, hogy páros és páratlan sok sorcserével is eljuthatunk egy permutációs mátrixból az identikusba.

Azt mondjuk, hogy egy permutációs mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzióinak száma 4, mert az első-második, első-negyedik, második-negyedik, harmadik-negyedik sorpárok inverzióban vannak.

4.55. TÉTEL: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX ELŐJELE. A permutációs mátrix aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik. Így ha egy permutációs mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba. Hasonlóan, ha az inverziók száma páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere megváltoztatja e két sor viszonyát: ha inverzióban álltak, akkor ezután nem fognak, és fordítva. Az előttük és mögöttük álló sorokhoz való viszonyuk nem változott. Eszerint az inverziók száma eggyel nőtt vagy eggyel csökkent, azaz paritása megváltozott.

Ezután cseréljük ki az i-edik és j-edik sorokat (legyen $i < j$). Az inverziók számának nyomon követése érdekében ezt szomszédos sorok cseréjével valósítjuk meg. Cseréljük ki az i-ediket az $(i + 1)$-edikkel, majd azt az $(i+2)$-edikkel,..., míg az eredetileg i-edik sor a j-edik helyére nem kerül. Ehhez $j-i$ sorcserére van szükség. Ezután az eredetileg j-edik sort $j-i-1$ sorcserével az i-edik helyre visszük. Ez összesen $2(j-i)-1$, azaz páratlan sok sorcsere, ami a paritást valóban ellenkezőjére változtatja. ■

4.56. PÉLDA: INVERZIÓK SZÁMA ÉS A DETERMINÁNS. Mennyi az inverziók száma abban a mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák állnak, és mennyi ennek determinánsa?

MEGOLDÁS. E mátrixban bármely két sor inverzióban áll egymással, így ha a sorok száma n, a sorpároké $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánsa $(-1)^{n(n-1)/2}$. ■

A determináns 4.54. tételbeli felbontása a determináns értékét a determináns elemeinek függvényeként állítja elő. Ennek sok szép és fontos következménye van. Íme kettő:

► Egy algebrai következmény: a determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Eszerint egész számokból álló determináns értéke egész szám.

► Egy függvényanalízis körébe tartozó következmény: a determináns értéke folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek. Eszerint bármely kis pozitív ε-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha a determináns bármely eleme legföljebb δ értékkel megváltozik, akkor a determináns értéke legföljebb ε-nyit változik.

Előjeles aldetermináns. Az előző paragrafushoz hasonlóan bontsuk az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst, az első sorvektorának felbontásával három determináns összegére, de egyúttal emeljük is ki az első sor elemét, majd oszlopcserékkel vigyük az 1-est tartalmazó oszlopot az első oszlop helyére:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Ha ezt összevetjük a Sarrus-szabályban kapott képlettel, igen érdekes sejtést fogalmazhatunk meg:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Mielőtt ezt megtennénk, némi előkészítés következik.

4.57. DEFINÍCIÓ: ELŐJELES ALDETERMINÁNS. Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-edrendű determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó *előjeles aldeterminánsának* nevezzük.

4.58. PÉLDA: ELŐJELES ALDETERMINÁNS. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát!

MEGOLDÁS. A determináns második sorát és harmadik oszlopát kiszíneztük

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{5} & 4 \end{vmatrix}.$$

Az ezek elhagyása után megmaradó aldetermináns és -1 megfelelő hatványának szorzata, vagyis a kért előjeles aldetermináns

$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2.$$

4.59. ÁLLÍTÁS: DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE. Tegyük fel, hogy az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0. Jelölje A_{ij} az az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen az $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorában az a_{ij}-n kívül minden elem 0 (hasonlóan tárgyalható, ha a j-edik oszlopban vannak nullák). Cseréljük ki a j-edik oszlopot a $(j-1)$-edikkel, majd ezt a $(j-2)$-edikkel..., addig, míg az $\mathbf{A}_{*j}$ oszlop az első oszlopba nem kerül. Ez $j-1$ oszlopcserét jelent, azaz a determináns értéke $(-1)^{j-1}$-szeresére változik. Ezután hasonlóképp vigyük az i-edik sort szomszédos sorok cseréjével az első sorba. Ehhez $i-1$ csere szükséges, miközben a determináns értéke $(-1)^{i-1}$-szeresére változik.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\overset{*}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\overset{**}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{ij}A_{ij}.
\end{aligned}$$

Az *-os egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $i+j-2$ és $i+j$ paritása azonos, tehát -1 kitevőjeként is azonos eredményt adnak, továbbá kiemeltük a_{ij}-t az első sorból. A **-os egyenlőség előtt álló determináns kiszámításához csak a másodiktól lefelé lévő sorokat kell használni, a végeredményt az első oszlop elemei nem befolyásolják, így az első sor és első oszlop elhagyásával kapott determináns értéke ugyanaz. Végül az így kapott determináns az előjellel együtt épp A_{ij}, és ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

4.60. PÉLDA: DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE. A determináns rendjének csökkentésével számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Minden lépésben – esetleg egy apró átalakítás után – találunk egy sort vagy oszlopot, melyben csak egy nemnulla szám áll:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} &= (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
(S_2 - S_1) \qquad &= (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+3} \cdot 5 \cdot (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+1} \cdot 6 \cdot (-5) \cdot (-8) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2; \end{vmatrix} \\
&= -12 \cdot (-6) \cdot (-5) \cdot (-8) \\
&= 2880.
\end{aligned}$$

Determináns kifejtése. Ritkán adódik, hogy a determináns rendje az előző (4.59.) állítás segítségével csökkenthető, viszont fölhasználásával a determinánsok egy gyönyörű kifejtési tételét kapjuk. Ezt egyes könyvek *Laplace-féle kifejtési tételnek* is neveznek (más könyvek csak ennek egy – a feladatok közt megtalálható – általánosítását nevezik így, sok könyv pedig e tételbeli összefüggéssel definiálja a determinánst).

4.61. TÉTEL: DETERMINÁNSOK KIFEJTÉSI TÉTELE. Egy determináns értéke megkapható úgy, hogy egy tetszőleges sorának vagy oszlopának minden elemét beszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és e szorzatokat összeadjuk. Képletben, az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorára és j-edik oszlopára

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan a korábbiakban látottakhoz, az i-edik sorvektor felbontásával a determinánst n olyan determináns összegére bontjuk, amelyek i-edik sorában csak egy elem származik az eredeti determinánsból, a többi 0. Az egyszerűség kedvéért e felbontást csak $n = 3$ és $i = 2$ esetére írjuk fel, de tetszőleges n-re ugyanígy megy. Ezután a 4.59. állítást alkalmazzuk mindegyik új determinánsra:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{2k} A_{2k}.
\end{aligned}$$

A bizonyítás ugyanígy megy az oszlopokra is, amit példaként az $n = 3$,

$j = 3$ esettel szemléltetünk:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{k3}A_{k3}.
\end{aligned}
$$

4.62. PÉLDA: KIFEJTÉSI TÉTEL. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a kifejtési tételt használva!

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.
$$

MEGOLDÁS. Érdemes a harmadik oszlop szerint kifejteni, mert ott két 0 is van, így a velük megszorzott aldeterminánsokat le sem kell írni.

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.
$$

Determinánsfüggvény létezése és egyértelműsége. ???

Cramer-szabály és a mátrix inverze. Eddig akár az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldására, akár az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámítására olyan módszert használtunk, mely csak egy algoritmust ad a számításokra, de nem adja meg a kapcsolatot (képletet) az adatok és a kiszámítandók közt. E paragrafusban ezt pótoljuk!

Jelölje $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$ azt a mátrixot, melyet akkor kapunk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik oszlopának helyére a $\mathbf{b}$ vektort írjuk. Kifejtve

$$
\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \ldots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \ldots \ \mathbf{a}_{*n}].
$$

E jelöléssel $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrixon az $[\mathbf{e}_{*1} \ \ldots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \ldots \ \mathbf{e}_{*n}]$ mátrixot értjük.

4.63. TÉTEL: CRAMER-SZABÁLY. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ekkor a megoldás előáll

$$
x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
$$

alakban.

Gabriel Cramer (1704–1752) genfi születésű svájci matematikus, akinek az algebrai görbékről szóló „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraique" című, 1750-ben publikált munkájában szerepelt a ma Cramer-szabály néven ismert tétel. A szabályt korábban már mások is ismerték.

BIZONYÍTÁS. Az állítás első felét már bizonyítottuk a 4.53. tételben. Ebből felhasználjuk, hogy mivel az egyenletrendszer megoldható, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Kihasználva, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, továbbá hogy $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \ldots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \ldots \ \mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{Ae}_{*1} \ \ldots \ \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \ \ldots \ \mathbf{Ae}_{*n}] \\
&= [\mathbf{a}_{*1} \ \ldots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \ldots \ \mathbf{a}_{*n}] \\
&= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}
\end{aligned}
$$

Mivel az $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrix i-edik sorának és oszlopának elhagyása után egy identikus mátrix marad, ezért az i-edik sora szerint kifejtve

$$\det \mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+i} x_i = x_i.$$

Így a determinánsok szorzási szabályát is használva $\det(\mathbf{A}\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}) = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, amiből $x_i \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, azaz $x_i = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} / \det \mathbf{A}$. ■

4.64. példa: Cramer-szabály. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 4 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

Megoldás. A kiszámolandó determinánsok a $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$ jelöléssel:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad \mathbf{A}_{1,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{6} & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad \mathbf{A}_{2,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{4} \\ 5 & \mathbf{6} \end{vmatrix} = -8.$$

Innen $x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}$, $y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}$. ■

Ha egyenletrendszert meg tudunk oldani, akkor szimultán egyenletrendszert is, és így pl. az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldásával a mátrix inverzét is ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}_{ij}$ elem kiszámításához az $\mathbf{A}\mathbf{x}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás i-edik koordinátája az $\mathbf{x}_{ij}$ elem. A Cramer-szabály szerint

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}$$

Mivel az $\mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}$ mátrix i-edik oszlopában csak egy elem nem 0, a kifejtési tétel szerint

$$\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

vagyis e determináns megegyezik az $\mathbf{A}$ egy előjeles aldeterminánsával, tehát

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Mint látjuk, az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ előállításához az $\mathbf{A}$ előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltjára van szükség, amit az $\mathbf{A}$ *adjungáltjának* nevezünk, és $\operatorname{adj} \mathbf{A}$-val jelölünk. Képletben

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = [A_{ij}]^T = [A_{ji}].$$

Így kapjuk a következő tételt:

4.65. TÉTEL: MÁTRIX INVERZÉNEK ELEMEI. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix. Ekkor inverzének ij indexű eleme az a_{ji} elemhez tartozó előjeles aldetermináns és a determináns hányadosa, azaz

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Így az inverz mátrix az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[A_{ij}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}. \tag{4.7}$$

alakba írható.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix adjungáltja

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \operatorname{adj} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

így inverze kifejezhető a segítségével:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

► A mátrix inverzének e kifejezése azt mutatja, hogy az inverz folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz egyáltalán létezik.

► Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1. Ez abból adódik, hogy $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$, tehát ha $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ nem lehet egészelemű, ha pedig $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor a (4.7) képlet szerint $\mathbf{A}^{-1}$ minden eleme egész szám.

4.66. PÉLDA: MÁTRIX ADJUNGÁLTJA ÉS INVERZE. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix adjungáltját és inverzét!

MEGOLDÁS. Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{adj} \mathbf{A}$. Az adjungált mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles aldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többit is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixból csak egy nemnulla kígyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det \mathbf{B} = 16$. Az adjungált kiszámításához szerencsére itt sem kell sok aldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt az adjungált is szimmetrikus, így a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \operatorname{adj} \mathbf{B} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Már ezekből az egyszerű példákból is látszik, hogy mátrix invertálása e módszerrel igen műveletigényes. Valóban, gyakorlati számításokhoz nem használjuk, elméleti okfejtésekben vesszük nagy hasznát.

1$^\bullet$ Írjuk fel a determináns definícióját mátrixokon értelmezett függvény helyett n-változós függvénnyel.

2$^\bullet$ Írjuk fel a determináns definícióját oly módon, hogy det egy n-változós, n-dimenziós vektorokon értelmezett skalár értékű függvény legyen.

3° Adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzásszabályára azt igazolva, hogy az $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{AB})/\det(\mathbf{B})$ leképezés eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek.

4 izonyítsuk be az LU-felbontás fölhasználásával a 4.49. tételt (mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával).

Az $\mathbf{A}$ előáll $\mathbf{PLU}$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. Az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A $\mathbf{P}$ permutációs mátrix determinánsa 1 vagy -1, transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{PP}^T) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^T) = 1$, azaz $\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^{-1}$ egyszerre 1 vagy -1, tehát megegyeznek. Végül $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PLU}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$, és $\det(\mathbf{A}^T) = \det((\mathbf{PLU})^T) = \det(\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{P}^T) = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{P})$ összevetése bizonyítja az állítást.

5$^\bullet$ A 4-edrendű determinánsok $4! = 24$ kígyó összegére bonthatók. Soroljuk fel őket! (A Sarrus-szabály 4-edrendű determinánsra csak 8 kígyóból állna, nem használható!)

6$^\bullet$ **Ferde kifejtés.** Vegyük egy determináns egy sorának elemeit, és szorozzuk meg mindegyiket egy másik sor azonos oszlopbeli eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsával, majd képezzük ezek összegét. Ez mindig 0. Hasonló állítás igaz a determináns minden oszlopára, azaz az i-edik és u-adik sorra ($i \neq u$) és a j-edik és v-edik oszlopra ($j \neq v$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kv} = 0.$$

Ha az i-edik sor elemeit az u-adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u-adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Másoljuk az i-edik sort az u-adik helyére, tehát minden k-ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}A_{uk}$, azaz e determináns u-adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

7$^\bullet$ Foglaljuk egyetlen állításba a kifejtési és a ferde kifejtési tételeket!

A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases} \tag{4.8}$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases} \tag{4.9}$$

8$^\bullet$ **Mátrix inverze.** A kifejtési és a ferde kifejtési (ld. az előző és a 4.3.6. feladatokat) segítségével adjunk új bizonyítást a mátrix inverzére vonatkozó **??**eq:invadj) formulátra!

A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^T = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ugyanis $[a_{ij}]$ i-edik sorának és $[A_{ij}]^T$ u-adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u-adik sorának skaláris szorzata a (4.8) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

Tárgymutató