Mátrixok LU – felbontása és az LU - felbontás alkalmazása egyenletrendszerek megoldására.

I. Adjuk meg az A mátrix LU – felbontását.

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$, szorozzuk meg a mátrixot balról az

$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokkal. Az alábbi mátrixokat kapjuk

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = U$$

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$. (Az 1. szorzatot használjuk.)

2. $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, elemi mátrixok: $E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

A szorzás után kapott mátrixok: $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, az 1. transzformáció után látható, hogy a 2. és 3. sort meg kell cserélnünk, azaz szorozni kell a $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ mátrixszal.

$$PA=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad A=P^{-1}LU=P^{T}LU=PLU$$

II. Az együttható mátrix LU – felbontását felhasználva oldjuk meg az adott egyenletrendszereket.

1. $\begin{bmatrix}2 & 8\\ -1 & -1\end{bmatrix}\underline{x}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & 8\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

$L\underline{y}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}\rightarrow\underline{y}=\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix},\quad U\underline{x}=\underline{y}=\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}\underline{x}=\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 6\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

$L\underline{y}=\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 6\end{bmatrix}\rightarrow\underline{y}=\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 0\end{bmatrix},\quad U\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\underline{x}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 3\\ 7\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

$L\underline{y}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 3\\ 7\end{bmatrix}\rightarrow\underline{y}=\begin{bmatrix}5\\ 9\\ 6\\ 4\end{bmatrix},\quad U\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\underline{x}=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$L\underline{y}=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 2\end{bmatrix}\rightarrow\underline{y}=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\quad U\underline{x}=\underline{y}\rightarrow\underline{x}=\begin{bmatrix}t\\ 2-2t\\ -1\end{bmatrix}$