MAT A2 – pót-ZH. – 2007. május 18. Név: ______________ Gyakvez.: ___

1. Határozzuk meg az alábbi értékeket! (E feladatok mindegyik olyan, hogy az eredmény kiszámolásához nem szükséges külön papíron számolni) *(20 pont)*

a) Legyen $\mathbf{X} = [x_{ij}]$ egy 3×3-es mátrix, előjeles aldeterminánsait jelölje X_{ij}. Ekkor
$x_{21}X_{21} + x_{22}X_{22} + x_{23}X_{23} =$
$x_{31}X_{21} + x_{32}X_{22} + x_{33}X_{23} =$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \end{vmatrix} =$

d) Ha az $\mathbf{A}$ egy $n \times m$-es mátrix, és oszlopterének dimenziója d, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma =

e) Az $x + z = 0$ egyenletű síkra való merőleges vetítés három független sajátvektora:

f) A sík origó körüli $\pi/3$ radiánnal való elforgatásának mátrixa =

g) Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény $(1, 1)$ pontbeli, $[3, 4]$ irányú iránymenti deriváltja:

h) Ismerjük a háromváltozós f függvény második parciális deriváltjainak F mátrixát egy olyan P pontban, ahol a gradiensvektor $\mathbf{0}$. Van-e szélsőértéke e függvénynek a P pontban, és milyen, ha

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

i) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi =$

j) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-y} 3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z =$

2. Írjuk fel a 4-dimenziós tér $x + y - z + 2w = 0$ egyenlettel megadott alterének egy bázisát! *(4 pont)*

3. Adjuk meg annak a $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineáris transzformációnak a mátrixát, mely az x-tengely irányában felére zsugorítja, majd az y-tengely körül $\pi/2$ szöggel elforgatja. *(4 pont)*

4. Válasszunk ki a 4-dimenziós $(1, 2, 2, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. *(4 pont)*

5. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét: *(6 pont)*

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$

6. Legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra, a valós λ számra és a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Mutassuk meg, hogy *(4 pont)*

a) $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ sajátértéke $\lambda + 1$.

b) $\mathbf{A}^2$ sajátértéke λ^2.

7. Írjuk fel a $\sin 3x$ függvényre az ötödfokú Taylor-polinomot a maradéktaggal! *(4 pont)*

8. Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvénynek a $(2, 1)$ ponthoz tartozó teljes differenciálját, $L(x, y)$ lineáris közelítését, és érintősíkjának egyenletét! *(4 pont)*