

1. Alapfeladatok, 2–4 ilyen típusú feladat lesz a ZH-n:

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a megadott módszerrel, ami a következők valamelyike lehet: lépcsős alakra hozással, redukált lépcsős alakra hozással, az együtthatómátrix inverzének felhasználásával, Cramer-szabállyal, LU-felbontással! (mindegyiket kell tudni)
- Az egyenletrendszerben lévő paraméterek mely értékei mellett lesz az egyenletrendszernek 0, 1, ∞ sok megoldása? (ismerni kell az egyenletrendszer megoldhatóságának feltételét)
- Egy mátrix LU-felbontásának előállítás, segítségével egyenletrendszer megoldása és a mátrix determinánsának kiszámítása!
- Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenletet! (mátrixműveletek)
- Lineáris transzformáció mátrixának felírása!
- Vektorok által kifeszített tér egy bázisának meghatározása; vektorok közül maximális számú lineárisan független kiválasztása, a többi előállítása ezek lineáris kombinációjaként; oszloptér, sortér, nulltér bázisának meghatározása.
- Determináns értékének számítása.
- Sajátérték és a sajátaltér egy bázisának meghatározása! Mátrix diagonalizálása.

2. Könnyen megválaszolható apró, feleletválasztós, behelyettesítő... feladatok a félév egész anyagából (elméletről is).

3. Legfeljebb 1 bizonyítás, vagy nehezebb, gondolkodtató feladat!

Nem kell tételt vagy definíciót pontosan kimondani, de lesznek a megértésüket ellenőrző kérdések. Néhány példa:

- Adja meg a síkban az $y = -x$ egyenesre való tükrözés mátrixát az $(1, 0)$, $(0, 1)$ bázisban (majd a $(1, 1)$, $(1, -1)$ bázisban is).
- Adja meg az $y = -x$ egyenesre való tükrözés sajátértékeit és sajátvektorait!
- Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
 Adja meg a sajátértékeit és sajátvektorait. Igazolja, hogy \mathbf{A} kielégíti az $\mathbf{A}^2 - \mathbf{I} = \mathbf{O}$ egyenletet! Adja meg az \mathbf{A} inverzének a sajátértékeit és sajátvektorait! Diagonalizálja az \mathbf{A} mátrixot!
- Egy mátrix sajátértékei 1, -1 , 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$. Számítsuk ki a mátrix 10-edik hatványát!
- Benne van-e a \mathbf{b} vagy \mathbf{c} vektor az \mathbf{A} mátrix oszloptérben? Ha igen, adja meg az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Adja meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ill. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ egyenletrendszer megoldásait, ha létezik, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7. Az a és b valós paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek (a) 1 megoldása (b) végtelen sok megoldása (c) 0 megoldása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix},$$

vagy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}.$$

8. Oldja meg x -re az alábbi egyenletet! (Útmutatás: használjuk a determináns tulajdonságait!)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Milyen x értékekre van az \mathbf{A} mátrixnak inverze?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x & x & x \end{bmatrix}?$$

10. Írjuk fel a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszer Jacobi-iterációval való megoldásában használt formulákat, majd az $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ vektorból indulva számítsuk ki \mathbf{x}_1 értékét! Határozzuk meg \mathbf{x}_1 értékét a Gauss-Seidel-iteráció esetén is!

11. Melyik igaz, melyik hamis az alábbiak közül?

- Minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldható.
- Minden inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldható.
- Ha egy valóegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két megoldása, akkor végtelen sok is van.
- Ha egy valóegyütthatós lineáris egyenletrendszerben kevesebb az egyenletek száma az ismeretlenekénél, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

12. Bizonyítsa be az alábbi állításokat!

- $\det(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^{n-1}$.
- $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$ (teljes indukcióval)
- Ha az invertálható \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixok felcserélhetők, akkor inverzeik is!